Petrė Grebeničenkaitė
Vincas Tamašauskas
Erika Tumėnaitė

T·r·u·m·p·a·s

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR STATISTIKOS

kursas moksleiviams

uždavinių pavy

Teorija + praktika = sėkmė egzaminuo

Petrė Grebeničenkaitė
Vincas Tamašauskas
Erika Tumėnaitė

Trumpas kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos kursas moksleiviams

2000
Šiauliai

Recenzavo ŠU Matematikos katedros
doc. dr. Donatas Jurgaitis

Leidinio autoriai:

Petrė Grebeničenkaitė - Šiaulių Salduvės vidurinės mokyklos mokytoja ekspertė;
Vincas Tamašauskas - Šiaulių Didždvario gimnazijos mokytojas metodininkas;
Erika Tumėnaitė - Panevėžio M. Karkos vidurinės mokyklos mokytoja metodininkė.

ISBN 9986 - 705 - 56 - 8

Moksleiviai, šiais metais neramiau plaka Jūsų širdys. Artėja valstybiniai egzaminai, artėja metas įrodyti, ko išmokote mokykloje. Nenusiminkite, jeigu ne visą matematikos kursą gvildenote it riešutus. Ši knygelė Jums pagelbės.

Mokantis matematikos, besirengiant valstybiniams egzaminams, pastaruoju metu ypač didelis dėmesys skiriamas kombinatorikos, tikimybių teorijos, statistikos uždaviniams. Leidinėlyje pateikta trumpa šių mokslų teorija, uždaviniai ir jų sprendimai. Knygelėje rasite ir uždavinių savarankiškam darbui, kurių pateikti tik atsakymai.

Manome, kad šiuo leidiniu galės naudotis bendrojo lavinimo mokyklų moksleiviai. Jis padės susisteminti kombinatorikos, tikimybių teorijos, matematinės statistikos žinias ir išmokti spręsti šių temų uždavinius.

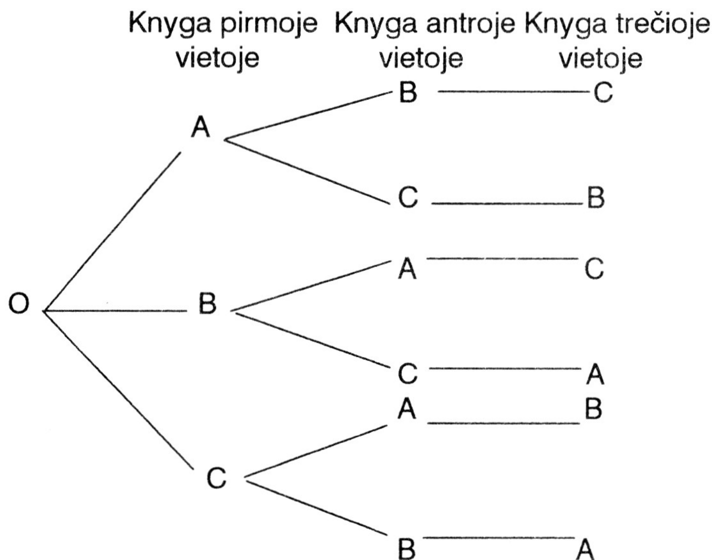
Mokomoji medžiaga išdėstyta suprantamai, prieinamai kiekvienam moksleiviui.

Matematikos sritis, kuri tiria klausimus, kiek skirtingų kombinacijų, tenkinančių tam tikras sąlygas, galima sudaryti iš turimų objektų, vadinama kombinatorika.

Galimybių medis

Uždavinys. Keliais būdais galime viena šalia kitos sustatyti lentynoje tris knygas ?

Sprendimas. Pažymėkime knygas raidėmis A; B; C. Sudarome galimybių medį, kurio viršūnę pažymime O. Nuo jos judėsime į dešinę visais galimais keliais, kurie parodyti piešinyje.

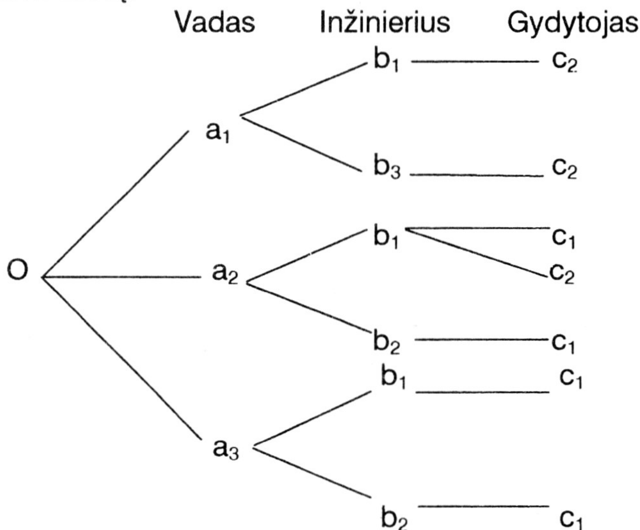


Matome, kad medis turi 6 šakas - kelius. Vadinasi, tris knygas sustatyti lentynoje yra 6 galimybės: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Ats.: 6.

Uždavinys. Laivo komandą sudaro vadas, inžinierius ir gydytojas. Yra trys kandidatai į vado vietą (a_1; a_2; a_3), trys - į inžinieriaus vietą (b_1; b_2; b_3) ir du - į gydytojo vietą (c_1; c_2). Žinoma, kad a_1 negali psichologiškai bendrauti su b_2; c_1; a_2 - su b_3; a_3 - su b_3; c_2; b_2 - su c_2; b_3 - su c_1. Sudarykite visas galimas laivo komandas.

Piešiame medį:



Galimybių medis rodo, kad galimi 7 variantai: $a_1b_1c_2$; $a_1b_3c_2$; $a_2b_1c_1$; $a_2b_1c_2$; $a_2b_2c_1$; $a_3b_3c_1$; $a_3b_2c_1$.

Ats.: 7.

Bendrieji kombinatorikos dėsniai

Kombinatorinė sudėties taisyklė

Sakykime, yra n_1 pirmosios rūšies elementų, n_2 antrosios rūšies elementų, ... , n_k k-tosios rūšies elementų. Pasirinkti iš jų vieną (arba pirmosios, arba antrosios, ... arba k-tosios rūšies) galima $n_1 + n_2 + ... + n_k$ būdų.

1. Uždavinys. Mokyklos bufete yra 5 rūšių bandelių ir 6 rūšių pyragaičių. Keliais būdais galima pasirinkti bandelę arba pyragaitį ?

Sprendimas. Pasirinkti vieną bandelę galima 5 būdais, pasirinkti vieną pyragaitį - 6 būdais. 1 pyragaitį arba 1 bandelę galima pasirinkti 5 + 6 = 11 būdų.

Ats.: 11.

2. *Uždavinys.* Mama sūnui gimimo dienos proga pažadėjo nupirkti žaislą. Parduotuvėje buvo 9 rūšių mašinėlių, 3 rūšių lėktuvėlių ir 2 rūšių laivelių. Keliais būdais sūnus gali pasirinkti dovaną ?

Sprendimas. Dovaną sūnus gali pasirinkti 9 + 3 + 2 = 14 būdų.

Ats.: 14.

Kombinatorinė daugybos taisyklė

Jei elementui x_1 pasirinkti yra k_1 būdų, elementui x_2 - k_2 būdų, ... , elementui x_n - k_n būdų, tai rinkinį $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ galima sudaryti $k_1 * k_2 * \dots * k_n$ būdu.

1. Uždavinys. Duoti skaitmenys 2, 3, 4, 6. Kiek iš jų galima sudaryti triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis ?

Sprendimas. Pirmąjį skaitmenį galima parinkti 4 būdais, antrąjį skaitmenį - 3 būdais (galima parinkti bet kurį iš trijų likusių po pirmojo parinkimo skaitmenį), trečiąjį skaitmenį - 2 būdais. Triženklių skaičių galima sudaryti $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ būdais.

Ats.: Vadinasi, iš skaitmenų 2, 3, 4, 6 galima sudaryti 24 triženklius skaičius, kurių visi skaitmenys skirtingi.

2. Uždavinys. Valgiaraštyje yra 4 pirmieji patiekalai ir 6 antrieji. Kiek yra būdų sudaryti pietus iš pirmojo ir antrojo patiekalų ?

Sprendimas. Pirmąjį patiekalą galima pasirinkti 4 būdais, antrąjį - 6 būdais. Vadinasi, galima sudaryti $4 \cdot 6 = 24$ pietų variantus.

Ats.: 24 būdai.

Gretiniai

Duoti keturi skirtingi elementai abcd. Užrašome visus galimus junginius, sudarytus iš 3 skirtingų elementų :

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcd

Gavome 24 junginius. Skirtingi junginiai vienas nuo kito skiriasi arba pačiais elementais, arba jų išdėstymo tvarka. Tokius junginius vadiname gretiniais iš 4 elementų po 3.

Apibrėžimas. Gretiniais iš n elementų po k elementų vadinami tokie junginiai, kurių kiekvienas turi k elementų, pasirinktų iš n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi arba elementais, arba jų išdėstymo tvarka.

Gretinių iš n elementų po k skaičius žymimas A_n^k.

Teorema. Gretinių iš n elementų po k skaičius lygus:

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot (n - k + 1).$$

Įrodymas. Kiekvienas gretinys sudarytas iš k elementų, iš kurių pirmąjį elementą galima parinkti n būdais. Lieka (n - 1) elementas. Antrąjį elementą galima parinkti (n - 1) būdais. Lieka (n - 2) elementai. Trečiąjį elementą galima parinkti (n - 2) būdais ir t.t. Paskutinį k-tąjį elementą galima parinkti (n – (k - 1)) būdais. Remiantis daugybos taisykle k elementų iš n elementų galima parinkti: $A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot (n - k + 1)$ būdais.

Natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n sandauga žymima n! ir vadinama n faktorialu, t.y. $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... 3 \cdot 2 \cdot 1$. Susitarta laikyti, kad $0! = 1$.

Pasinaudoję šiais pažymėjimais A_n^k skaičiavimo formulę galima užrašyti taip: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Susitarta laikyti, kad $A_0^0 = 1$; $A_n^0 = 1$.

1. ***Uždavinys.*** Keliais skirtingais būdais iš devynių kandidatų galima išrinkti keturis žmones keturioms skirtingoms pareigoms ?

Sprendimas.

I būdas

Pirmąjį žmogų galima išrinkti 9 būdais, antrąjį - 8 būdais, trečiąjį - 7 būdais, ketvirtąjį - 6 būdais. Pagal daugybos taisyklę gauname $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ būdų.

II būdas

Iš viso yra 4 vietos ir 9 kandidatai į jas. Tik keturi iš devynių kandidatų bus išrinkti užimti tas skirtingas pareigas. Svarbi ir tvarka, kuria keturi kandidatai bus išrinkti toms pareigoms. Taigi čia kalbama apie gretinius iš 9 elementų po 4.

$A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ būdų.

Ats.: 3024 būdų.

2. *Uždavinys.* Meno mokyklos IX klasėje yra 20 berniukų ir 10 mergaičių. Koncertui reikia šokėjų dueto, dainininkų dueto ir gimnastų dueto (kiekvieną duetą sudaro berniukas ir mergaitė). Keliais būdais galima parinkti koncerto atlikėjus (sakykime, visi moka dainuoti, šokti ir atlikti gimnastikos pratimus) ?

Sprendimas. Iš 20 berniukų pasirinkti šokėją, dainininką ir gimnastą galima A_{20}^3 būdais. Yra A_{10}^3 būdų iš 10 mergaičių parinkti šokėją, dainininkę ir gimnastę.

Pagal daugybos taisyklę šokėjų, dainininkų ir gimnastų duetams pasirinkti yra

$$A_{20}^{3} \cdot A_{10}^{3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 4924800 \text{ būdų}.$$

Ats.: 4924800.

3. *Uždavinys.* Keliais būdais iš 8 skirtingų knygų galima išsirinkti 4 ir pastatyti jas į 4 lentynėles ?

Sprendimas. Iš viso yra 8 knygos, iš kurių reikia išsirinkti 4. Svarbu ir tvarka, kuria pastatomos 4 knygos keturiose lentynos vietose, tai yra reikia skaičiuoti gretinius iš 8 elementų po 4.

$$A_{8}^{4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680 \text{ būdų}.$$

Ats.: 1680.

4. *Uždavinys.* Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 2, 3, 5, 8, jų nekartojant ?

Sprendimas. Iš penkių skaitmenų 0, 2, 3, 5, 8 galima sudaryti A_5^3 skaičius. Tarp šių skaičių bus skaičių, kurie prasideda skaitmeniu 0. Tokių skaičių yra tiek, kiek gretinių po du elementus galima sudaryti iš skaitmenų 2, 3, 5, 8, t.y. A_4^2. Vadinasi, ieškomų triženklių skaičių yra $A_5^3 - A_4^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 48$.

Ats.: 48.

5. *Uždavinys.* Išspręskite lygtį $A_n^5 = 30\, A_{n-2}^4$.

Sprendimas. Perrašome lygtį pritaikę gretinių formulę:

$$n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4) = 30(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5).$$

Kadangi $n - 2 \geq 4$, t.y. $n \geq 6$, tai abi puses galime padalinti iš $(n - 2)(n - 3)(n - 4)$. Gauname:

$$n(n - 1) = 30(n - 5); \; n^2 - 31n + 150 = 0, \text{ iš čia } n_1 = 6,\; n_2 = 25.$$

Kėliniai

Apibrėžimas. Gretiniai iš n elementų po n elementų vadinami kėliniais iš n elementų.

A_n^n žymime P_n. Tada $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

1. Uždavinys. Kiek skirtingų žodžių galima sudaryti iš žodžio ***kėlinys*** raidžių ?

Sprendimas. Gauname tiek skirtingų žodžių, kiek yra kėlinių iš 7 elementų, t.y. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Ats.: 5040.

2. Uždavinys. Kiek skirtingų penkiaženklių skaičių, nesidalijančių iš 5 ir neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 ?

Sprendimas. Iš penkių skirtingų skaitmenų galima sudaryti P_5 penkiaženklių skaičių. Pagal uždavinio sąlygą skaičiai neturi dalytis iš 5, t.y. paskutinis skaitmuo neturi būti 5.

Jeigu skaitmenį 5 parašysime paskutinėje vietoje, tai likusieji 4 skaitmenys gali pasiskirstyti P_4 būdais. Visas uždavinio sąlygas tenkina $P_5 - P_4$ skaičiai.

$P_5 - P_4 = 120 - 24 = 96$. Vadinasi, tokių skaičių yra 96.

Ats.: 96.

3. Uždavinys. Kiek 5 kartotinių šešiaženklių skaičių, kurių skaitmenys nesikartoja, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Sprendimas. Šeštasis šių skaičių skaitmuo turi būti 5. Kiti penki skaitmenys gali būti įrašyti penkiose vietose bet kuria tvarka. Tai yra kėlinių iš 5 elementų skaičius, t.y. tokių skaičių bus

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Ats.: 120.

4. ***Uždavinys.*** 10 knygų - 7 skirtingų autorių ir 3 vieno autoriaus - sustatytos vienoje knygų lentynoje. Kiek yra galimybių į lentyną jas atsitiktinai sustatyti taip, kad to paties autoriaus knygos būtų greta ?

Sprendimas. To paties autoriaus 3 knygas laikome viena knyga. Tada turėsime 8 skirtingų autorių knygas, kurioms sustatyti į lentyną yra P_8 būdų. Tris to paties autoriaus knygas galima sustatyti į lentyną P_3 būdais. Pagal daugybos taisyklę knygoms į lentyną sustatyti iš viso yra $P_3 \cdot P_8 = 3! \cdot 8!$ būdų.

Ats.: $3! \cdot 8!$

5. ***Uždavinys.*** Kiek skirtingų nelyginių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaičiaus 3694 skaitmenų ?

Sprendimas. Skaičiaus paskutinis skaitmuo yra nelyginis, todėl likusieji trys skaitmenys gali stovėti trijose vietose bet kuria tvarka. Tokių skaičių yra P_3. Kadangi paskutinis skaičiaus skaitmuo yra 3 arba 9, tai pagal sandaugos taisyklę galima sudaryti $2P_3 = 12$ skirtingų nelyginių keturženklių skaičių.

Ats.: 12.

Deriniai

Uždavinys. Keliais skirtingais būdais galima išrinkti tris knygas iš keturių, pažymėtų A, B, C, D, jei knygų tvarka rinkinyje nesvarbi ?

Sprendimas. Šiuo atveju išrinkti tris knygas iš keturių – vadinasi, nurodyti tą vieną knygą, kurios neimsime, o tai galima padaryti keturiais būdais. Todėl yra keturi skirtingi knygų rinkiniai: ABC, ABD, ACD, BCD. Šiuose knygų rinkiniuose nesvarbi elementų pasirinkimo tvarka. Kiekvienas trijų knygų rinkinys iš keturių vadinamas deriniu iš keturių knygų po tris. Derinių skaičių žymime C_4^3. Matome, kad $C_4^3 = 4$.

Ats.: 4.

Apibrėžimas. Deriniais iš n elementų po k elementų vadinami tokie junginiai, kurių kiekvienas turi k elementų, parinktų iš duotųjų n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi tik pačiais elementais.

Teorema. Derinių iš n po k skaičius apskaičiuojamas pagal formulę:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Įrodymas. Kiekvieną derinį, turintį k elementų, galima sutvarkyti k! būdais, perstatant jo elementus.

Gausime gretinius, kurių bus k! kartų daugiau negu derinių.

Vadinasi, $k!C_n^k = A_n^k$;

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Formulės $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$ skaitiklį ir vardiklį padauginę iš (n - k)!, gausime kitą derinių skaičiaus formulę:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Susitarta laikyti $C_n^0 = 1$ ir $C_0^0 = 1$.

Teorema įrodyta.

Pagrindinė derinių savybė: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Įrodykime šią savybę.

Įrodymas. Turime $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Skaičiuojame $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ ir gauname, kad $C_n^k = C_n^{n-k}$.

1. Uždavinys. Keliais būdais galima 20 berniukų ir 30 mergaičių paskirstyti į dvi klases taip, kad kiekvienoje klasėje būtų 10 berniukų ir 15 mergaičių?

Sprendimas. Ieškome skaičių būdų, kuriais galima sudaryti pirmą klasę. Klasė susideda iš berniukų grupės, kurią galima išrinkti C_{20}^{10} būdais ir mergaičių grupės, kurią galima išrinkti C_{30}^{15} būdais. Pagal daugybos taisyklę galima paskirstyti $C_{20}^{10} \cdot C_{30}^{15}$ būdais.

Ats.: $C_{20}^{10} \cdot C_{30}^{15}$.

2. *Uždavinys.* Keliais skirtingais būdais galima išrinkti 3 žmonių komisiją iš 10 žmonių?

Sprendimas. Tvarka, kuria renkami komisijos nariai, nesvarbi. Vadinasi, yra tiek būdų išrinkti komisiją, kiek yra derinių iš 10 po 3, t.y.

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Ats.: 120.

3. Uždavinys. Keliais skirtingais būdais iš 8 skirtingų knygų galima išrinkti bent vieną knygą ?

Sprendimas. Pasirinkti vieną knygą yra C_8^1 galimybių, dvi knygas - C_8^2 galimybių, ... , 8 knygas - C_8^8 galimybių. Pagal sudėties taisyklę iš viso būdų yra $C_8^1 + C_8^2 + ... + C_8^8$.

Ats.: $C_8^1 + C_8^2 + ... + C_8^8$.

4. Uždavinys. Keliais skirtingais būdais vienoje eilutėje galima išdėstyti 4 vienetus ir 6 nulius ?

Sprendimas. Eilutėje iš 10 ženklų reikia išrinkti vietas vienetams, o tuščiose vietose įrašyti nulius. Tai galima padaryti C_{10}^4 būdais. (Galima buvo išrinkti vietas nuliams C_{10}^6 būdais.)

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210.$$

Ats.: 210.

5. Uždavinys. Keliais būdais galima sudaryti trijų žmonių iš keturių sutuoktinių porų komisiją, jeigu:

a) į komisijos sudėtį įeina trys iš aštuonių žmonių,

b) į komisijos sudėtį įeina dvi moterys ir vienas vyras,

c) į komisijos sudėtį negali įeiti vienos šeimos nariai.

Sprendimas.

a) $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$

b) Dvi moteris galima išrinkti C_4^2 būdais, o vyrą - keturiais būdais. Todėl

$$C_4^2 = 4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 24.$$

c) Į komisijos sudėtį turi įeiti trijų šeimų nariai. Iš keturių šeimų tris galima išrinkti C_4^3 būdais. Iš kiekvienos trijų šeimų gali įeiti

po vieną narį, kurį galima išrinkti 2 būdais. Iš trijų šeimų vyrą arba žmoną galima išrinkti 2 · 2 · 2 = 2^3 būdais. Pagal daugybos taisyklę $C_4^3 \cdot 2^3 = 32$.

Ats.: ***a)*** 56, ***b)*** 24, ***c)*** 32.

6. <u>Uždavinys.</u> Skristi į Marsą turi būti sudaryta tokia kosminio laivo įgula: laivo vadas, pirmasis padėjėjas, antrasis padėjėjas, kurie turi būti atrinkti iš 10 skrydžiams besirengiančių karo lakūnų; 2 borto inžinieriai, kurie turi būti atrinkti iš 8 kosminių laivų įrenginių technikų, ir gydytojas, kurio darbui kosmose rengiami 5 medikai. Keliais skirtingais būdais galima sukomplektuoti kosminio laivo įgulą ?

<u>Sprendimas.</u> Laivo vadas ir du jo padėjėjai renkami iš 10 asmenų. Išrinktos trijų žmonių grupės gali skirtis ne tik pasirinktais žmonėmis, bet ir jiems skiriamų pareigų eile. Ši trijų žmonių grupė gali būti sudaryta A_{10}^3 būdais.

Borto inžinierių pareigos vienodos, vadinasi, jie gali būti parinkti C_8^2 būdais; gydytojas - C_5^1 būdais.

Visa komanda gali būti sudaryta

$$A_{10}^3 \cdot C_8^2 \cdot C_5^1 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 5 = 100800 \text{ būdais.}$$

Ats.: 100800 būdais.

7. <u>Uždavinys.</u> 14 vaikinų ir 15 merginų nutarė aplankyti teatrą, bet gavo tik 20 bilietų 12-oje eilėje nuo 1 iki 20 vietos. Keliais būdais jie gali pasidalinti 20 bilietų taip, kad jokios dvi merginos ir jokie du vaikinai nesėdėtų greta ?

<u>Sprendimas.</u> Sakykime, 10 vaikinų užims nelygines vietas, o 10 merginų - lygines. Dešimt vaikinų iš 14 gali užimti 10 nelyginių vietų A_{14}^{10} būdais. Dešimt merginų iš 15 gali užimti 10 lyginių vietų A_{15}^{10} būdais. Taip pat vaikinai gali užimti lygines vietas, o merginos nelygines. Iš viso yra $2A_{15}^{10} \cdot A_{14}^{10}$ būdų.

Ats.: $2A_{15}^{10} \cdot A_{14}^{10}$.

8. Uždavinys. Duoti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 30. Keliais būdais galima išrinkti tris skaičius taip, kad jų suma būtų lyginė ?

Sprendimas. Trijų skaičių suma bus lyginė, jei visi dėmenys lyginiai arba vienas dėmuo lyginis ir du nelyginiai.

Aišku, iš 15 lyginių skaičių tris galima išrinkti C_{15}^{3} skirtingais būdais. Iš 15 nelyginių skaičių du galima išrinkti C_{15}^{2} skirtingais būdais. Iš 15 lyginių skaičių vieną lyginį galima išrinkti 15 skirtingų būdų. Pagal sandaugos taisyklę du nelyginius ir vieną lyginį skaičių galima išrinkti $15C_{15}^{2}$ skirtingais būdais. Tris skaičius, atitinkančius sąlygos reikalavimą, pagal sudėties taisyklę galima išrinkti

$C_{15}^{3}+15C_{15}^{2}=2030$ skirtingais būdais.

Ats.: 2030.

9. Uždavinys. 5 mergaitės ir 3 berniukai žaidžia kvadratą. Keliais būdais jie gali pasiskirstyti į dvi komandas po 4, kad kiekvienoje komandoje būtų bent vienas berniukas ?

Sprendimas. Yra viena galimybė: vieną komandą sudaro trys mergaitės ir vienas berniukas,o kitą - dvi mergaitės ir du berniukai.

Pagal sandaugos ir sumos taisykles paskirstyti į dvi komandas yra $C_{5}^{3}\cdot 3+C_{5}^{2}\cdot C_{3}^{2}=60$ skirtingų būdų.

Ats.: 60.

10. Uždavinys. Autobuso bilietai sunumeruoti nuo 000001 iki 999999. Moksleiviai mano, kad bilietas laimingas, jei pirmieji trys jo skaitmenys nelyginiai ir skirtingi, o kiti trys lyginiai, be to, 7 ir 8 nestovi greta. Kiek yra laimingų bilietų ?

Sprendimas. Sakykime, laimingojo bilieto numeris $\overline{abcdef}$. a galima parinkti 5 būdais, b - 4 būdais, c - 3 būdais, d - 5 būdais, e - 5 būdais, f - 5 būdais.

Skaičius, kurių pirmieji trys skaitmenys nelyginiai ir skirtingi, antrieji trys lyginiai, galima parinkti $5\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5=7500$ būdais.

Tarp gautųjų skaičių yra tokių, kurių trečioje vietoje stovi skaitmuo 7, o ketvirtoje - skaitmuo 8. Tokių skaičių yra $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300$.

Vadinasi, laimingų bilietų yra $7500 - 300 = 7200$.

Ats.: *7200.*

11. <u>Uždavinys.</u> Marius užmiršo saugojimo kameros numerį, susidedantį iš vienos raidės (vienos iš dešimties) ir penkių skaitmenų. Tik atsiminė, kad tame numeryje yra skaitmenys 2, 3, 6, 7. Kiek daugiausia gali būti bandymų variantų, kad atrakintume saugojimo kamerą?

<u>Sprendimas.</u> Tame numeryje yra keturi skaitmenys 2, 3, 6, 7, kurie gali užimti penkias vietas. Tai galima padaryti $A_5^4 = 5!$ skirtingais būdais, bet penktasis skaitmuo gali būti bet kuris iš 10. Todėl skirtingų numerių, be raidės, yra $10 \cdot A_5^4$. Kombinuodami tuos skaičių rinkinius su kiekviena iš dešimties raidžių, gauname $10 \cdot 10 \cdot 5!$ skirtingų numerių.

Ats.: $10^2 \cdot 5!$

12. <u>Uždavinys.</u> Lygtyje $ax + b = cx + d$ koeficientų a, b, c ir d reikšmės gali būti 1, 2, 3.

1. Kiek galima sudaryti lygčių parenkant a, b, c ir d reikšmes?

2. Kiek tarp jų yra lygčių, kurios neturi sprendinių?

<u>Sprendimas.</u>

1. Skaičiuojame, kiek galima sudaryti lygčių: a gali įgyti 3 reikšmes, b - 3, c - 3 ir d - 3. Tada lygčių skaičius gali būti lygus

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

2. Lygtis $ax + b = cx + d$, t.y. $x(a - c) = d - b$, neturi sprendinių, kai $a - c = 0$, tai atsitinka trimis atvejais: $a = c = 1$; $a = c = 2$; $a = c = 3$, ir $d - b$ turi būti ne nulis, tai galima A_3^2 atvejais. $A_3^2 = 6$. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę duotoji lygtis neturi sprendinių $3 \cdot 6 = 18$ atvejų.

Ats.: ***1)*** 81, ***2)*** 18.

Junginiai su pasikartojimais

Kėliniai su pasikartojimais

1. ***Uždavinys.*** Kiek galima sudaryti skirtingų žodžių iš raidžių a, a, a, a, b, b, b ir c, c ?

Sprendimas. Sakykime, turime 9 tuščius langelius.

Į bet kuriuos 4 langelius galima įrašyti raidę a. Vadinasi, į tuos langelius įrašyti raidę a yra C_9^4 būdų. Lieka laisvi 5 langeliai, į kuriuos įrašyti raidę b yra C_5^3 būdų. Lieka du laisvi langeliai, į kuriuos vieninteliu būdu, t.y. C_2^2, įrašoma raidė c.

Pagal daugybos taisyklę galima sudaryti $C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$ naujų žodžių, t.y.

$$\frac{9!}{4!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 1 = \frac{9!}{4!3!2!}$$

Ats.: $\frac{9!}{4!3!2!}$.

Apibrėžimas. Jei yra duota n elementų, iš kurių kiekvienas atitinkamai gali kartotis n_1 ,n_2, ..., n_r kartų, tai skirtingų kėlinių, kuriuos galima sudaryti iš duotųjų elementų, skaičius lygus

$$P(n_1; n_2; ...; n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_r!}, \text{ kur } n_1 + n_2 + ... + n_r = n.$$

2. *Uždavinys.* Kiek yra būdų žodžio *araratas* raidėms perstatinėti ?

Sprendimas.

I būdas

Iš viso yra 8 raidės. Vadinasi, reikia sužinoti, kiek yra rinkinių iš 8 raidžių, kurių sudėtis (4; 2; 1; 1). Tokių kėlinių su pasikartojimais yra $\frac{8!}{4!2!1!1!} = 840$.

Vadinasi, yra 840 būdų žodžio *araratas* raidėms perstatinėti.

II būdas

Keturias raides a įrašyti į 8 vietas yra C_8^4 būdų, dvi raides r į 4 vietas - C_4^2 būdų, raidę t į 2 vietas - C_2^1 būdų, raidę s - 1 būdas.

Pagal daugybos taisyklę

$$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 1;$$

$$\frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot 2 \cdot 1;$$

$$\frac{8!}{4!2!}.$$

Ats.: $\frac{8!}{4!2!}$.

3. Uždavinys. Kiek yra būdų sustatyti baltąsias figūras: 2 žirgus, 2 rikius, 2 bokštus, 1 valdovę, 1 karalių pirmoje šachmatų lentos linijoje ?

Sprendimas. Randame skaičių kėlinių su pasikartojimais, kurių sudėtis (2, 2, 2, 1, 1):

$$P(2;2;2;1) = \frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040.$$

Ats.: 5040.

Kėliniai su neribotu pasikartojimų skaičiumi

1. Uždavinys. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 3, 4, kai tas pats skaitmuo skaičiuje gali kartotis ?

Sprendimas. Dešimčių vietoje galima rašyti bet kurį duotą skaitmenį, vadinasi, jam parinkti yra 3 galimybės. Kadangi skaitmuo skaičiuje gali kartotis, tai vienetų vietoje galima rašyti vėl bet kurį duotą skaitmenį ir jam parinkti yra 3 galimybės. Pagal daugybos taisyklę gauname $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ skirtingų dviženklių skaičių.

Ats.: 9.

2. Uždavinys. Dvidešimt moksleivių sprendžia uždavinį. Kiekvienas, teisingai išsprendęs, pateks į mokyklos komandą, kuri dalyvaus miesto olimpiadoje. Kiek yra galimybių sudaryti komandą?

Sprendimas. Kiekvienas iš 20 moksleivių turi dvi galimybes patekti ar nepatekti į mokyklos komandą. Pagal daugybos taisyklę iš viso yra 2^{20} galimybių sudaryti komandą.

Ats.: 2^{20}.

Apibrėžimas. Kėlinių su pasikartojimais iš n elementų po k elementų skaičius žymimas $\overline{P_n^k}$ arba $\overline{A_n^k}$ ir apskaičiuojamas pagal formulę $\overline{P_n^k} = n^k$.

3. Uždavinys. 3 vaikinai ir 2 merginos renkasi parduotuves, kuriose galėtų nusipirkti rūbų. Keliais būdais jie gali tai padaryti, jei mieste yra trys parduotuvės, kuriose prekiaujama tik vyriškais rūbais, dvi parduotuvės, skirtos tik moterims, ir dvi parduotuvės, prekiaujančios vyriškais ir moteriškais rūbais ?

Sprendimas. Kiekvienas iš trijų vaikinų pasirinkti parduotuvę turi 5 galimybes, kiekviena iš dviejų merginų - 4 galimybes. Trys vaikinai gali pasirinkti parduotuvę 5^3 būdais, o dvi merginos - 4^2 būdais. Pagal daugybos taisyklę trys vaikinai ir dvi merginos gali pasirinkti parduotuvę $5^3 \cdot 4^2$ būdais. Tai yra 2000 būdų.

Ats.: 2000.

Deriniai su pasikartojimais

Apibrėžimas. Deriniai iš n elementų po k elementų su pasikartojimais apskaičiuojami pagal formulę:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad \text{arba} \quad \overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k.$$

1. Uždavinys. Turime 4 rūšių pyragaičių. Keliais būdais galime sudaryti rinkinį iš 8 pyragaičių ?

Sprendimas. Kadangi šiame uždavinyje pyragaičių tvarka nesvarbu, tai kiekvienas rinkinys sudaromas iš 8 pyragaičių, kurie yra 4 rūšių. Reikia rasti skirtingų rinkinių skaičių, t.y. derinių su pasikartojimais iš 4 elementų po 8 skaičių. Gauname:

$$\overline{C_4^8} = C_{11}^8 = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$

Taigi galima sudaryti 165 skirtingus rinkinius.

Ats.: 165.

2. *Uždavinys.* 6 vienodus daiktus reikia sudėti į tris dėžes. Kiekvienoje dėžėje telpa visi 6 daiktai. Kiek yra būdų tai padaryti ?

Sprendimas.

$$\overline{C_3^6} = C_8^6 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Vadinasi, 6 vienodus daiktus sudėti į tris nurodytas dėžes galima 28 būdais.

Ats.: 28.

Niutono binomo formulė

Įrodome formulę:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

$$C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!n}{(m-1)!(n-m-1)!m(n-m)} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

Pagal šią formulę sudarome Paskalio trikampį:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Lentelės (n+1) - oje eilutėje surašyti skaičiai

$$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n \cdot (C_n^0 = C_n^n = 1).$$

Kadangi C_{n-1}^{m-1} ir C_{n-1}^m šioje eilutėje yra aukščiau negu C_n^m ir parašyti joje į dešinę ir kairę nuo C_n^m, tai, norint rasti C_n^m, reikia sudėti į dešinę ir į kairę nuo jo esančius ankstesnės eilutės skaičius. Pavyzdžiui, 10 šeštoje eilutėje gavome sudėję penktosios eilutės skaičius 4 ir 6 bei 6 ir 4.

Su Paskalio trikampio eilučių skaičiais susiduriame keldami laipsniu dvinarį a + b. Pavyzdžiui,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Matome, kad koeficientai 1; 2; 1 - tai skaičiai, surašyti trečioje lentelės eilutėje, t.y. C_2^0, C_2^1, C_2^2, o skaičiai 1; 3; 3; 1 - surašyti ketvirtoje tos lentelės eilutėje, t.y. C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3.

Samprotaudami panašiai, gauname formulę

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + C_n^n b^n,$$

kai $n \in N$, kuri vadinama Niutono binomu.

Dešinioji Niutono binomo formulės dalis vadinama binomo laipsnio dėstiniu. Koeficientai C_n^k vadinami binominiais koeficientais.

Į Niutono binomo formulę įrašę $a = b = 1$ gauname

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + C_n^n.$$

Niutono binomo formulės savybės:

1) Dešinėje Niutono formulės dalyje yra n+1 dėmuo.

2) Kiekvienas dėmuo yra $C_n^k a^{n-k} b^k$ pavidalo.

Dėmuo $C_n^k a^{n-k} b^k$ yra (k + 1) - oje vietoje, todėl formulė $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ vadinama (k + 1) - ojo nario formule.

3) Kiekvieno dėstinio nario n laipsnio rodiklis yra vienetu mažesnis negu pirmesniojo, o b laipsnio rodiklis vienetu didesnis. Bet kurio nario a ir b laipsnių rodiklių suma lygi n.

4) Dėstinio binominiai koeficientai yra Paskalio trikampio n-osios eilutės skaičiai.

1. Uždavinys. Raskite dėstinio $\left(Z^{\frac{1}{2}} + Z^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$ ketvirtąjį narį.

Sprendimas. Pritaikę (k+1)-ojo nario formulę

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, gauname $T_{3+1} = C_{12}^3 \left(Z^{\frac{1}{2}}\right)^9 \left(Z^{\frac{2}{3}}\right)^3$.

Ketvirtasis dėstinio narys bus lygus:

$$T_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} Z^{\frac{9}{2}} Z^2 = 220Z^{\frac{13}{2}}.$$

Ats.: $220Z^{\frac{13}{2}}$.

2. *<u>Uždavinys.</u>* Raskite dėstinio $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ narį, nepriklausantį nuo x.

<u>Sprendimas.</u> $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

Tada $T_{k+1} = C_9^k x^{9-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$,

$$T_{k+1} = C_9^k x^{9-k} x^{-\frac{1}{2}k},$$

$$T_{k+1} = C_9^k x^{9-\frac{3}{2}k}.$$

Narys nepriklausys nuo x, jeigu

$9 - \frac{3}{2}k = 0$, iš čia k = 6.

Šis narys bus lygus $C_9^k = C_9^6 = C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84$.

Ats.: 84.

Išspręskite kombinatorikos uždavinius

1) Keliais skirtingais būdais galima užrašyti 40 paeiliui einančių triženklių skaičių ?

Ats.: 861.

2) Raskite sumą visų keturženklių skaičių, kurių kiekvieno užraše ne daugiau kaip po vieną kartą randami skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9.

Ats.: 399960.

3) Klasėje yra 5 pirmūnai, 13 gerai besimokantys, 7 patenkinamai besimokantys ir 2 nepažangūs moksleiviai. Keliais būdais galima išrinkti 4 moksleivių, turinčių skirtingą žinių lygį, grupę ?

Ats.: 910.

4) Kiek įstrižainių turi iškilusis devyniakampis ?

Ats.: 27.

5) Keliais būdais iš 10 žmonių galima išrinkti grupę, sudarytą iš ne mažiau kaip dviejų ir ne daugiau kaip devynių žmonių ?

Ats.: 1012.

6) Kiek skirtingų taisyklingų trupmenų galima sudaryti iš skaičių 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 taip, kad kiekvienos trupmenos užrašymui būtų panaudoti tik du skaičiai ?

Ats.: 28.

7) Senelis Šaltis per dieną turi aplankyti 50 vaikų. Keliais būdais jis gali sudaryti jų lankymo eilę ?

Ats.: 50!

8) Iš A į B veda trys skirtingi keliai, iš B į C - keturi skirtingi keliai. Keliais skirtingaias maršrutais galime:

a) keliauti iš A į C per B;

b) keliauti iš A į C per B ir po to grįžti į A iš C per B;

c) keliauti iš A į C per B ir po to grįžti vėl per B, bet nekeliauti nė vienu keliu du kartus ?

Ats.: **a)** 12; **b)** 144; **c)** 72.

9) Keliais būdais galima pavardės *Jovaiša* perstatyti raides, taip, kad junginys *Jo* visada išliktų ?

Ats.: $\frac{1}{2} \cdot 6!$

10) Raskite dėstinio $(x+2)^{12}$ aštuntąjį narį.

Ats.: $101376x^7$.

11) Raskite dėstinio $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$ narį, neturintį x.

Ats.: 84.

12) Išspręskite lygtį $C_{x+2}^4 = x^2 - 1$.

Ats.: 4.

13) Išspręskite lygtį $30\,P_x = P_{x+2}$.

Ats.: 4.

14) Kiek yra galimybių susodinti už apskrito stalo 5 moteris ir 5 vyrus, kad vienos lyties asmenys nesėdėtų greta ?

Ats.: 2880.

15) 30 žmonių balsuoja už penkis pasiūlymus. Kiekvienas balsuoja tik už vieną pasiūlymą ir atsižvelgiama tik į balsų skaičių už kiekvieną pasiūlymą. Kiek yra galimybių pasiskirstyti balsams ?

Ats.: 46376.

16) Iš 18 skirtingų gėlių reikia sudaryti puokštę taip, kad joje būtų ne mažiau kaip 3 gėlės. Keliais būdais galima sudaryti puokštę?

Ats.: 261972.

17) Keliais būdais galima paskirti į budėjimą 5 kareivius ir 1 karininką, jei yra 40 kareivių ir 3 karininkai ?

Ats.: 1974024.

18) Keliais būdais iš 40 žmonių, užsiregistravusių darbo biržoje, galima sudaryti 4 grupes (po 10 žmonių kiekvienoje) mokytis skirtingų specialybių ?

Ats.: $\dfrac{40!}{(10!)4}$.

19) Jokios trys iškiliojo dešimtkampio įstrižainės nesikerta viename taške. Raskite įstrižainių susikirtimo taškų skaičių.

Ats.: 210.

20) Keliais būdais 9 vaikinai gali pasikviesti šokiui 9 merginas?

Ats.: 9!

21) Susirinko 10 skirtingo ūgio išminčių. Keliais būdais jie gali:

a) sustoti į eilę pagal ūgį;

b) sustoti į eilę;

c) susėsti prie apskrito stalo taip, kad nors vienas išminčius pakeistų kaimyną iš kairės arba iš dešinės;

d) susėsti prie apskrito stalo taip, kad nors vienas išminčius pakeistų nors vieną kaimyną ?

Ats.: **a)** 2; **b)** 10!; **c)** 9!; **d)** $\dfrac{9!}{2}$.

22) Grupėje yra 10 merginų ir 13 vaikinų. Keliais būdais galima išrinkti:

a) arba tris vaikinus, arba keturias merginas;

b) tris vaikinus ir keturias merginas;

c) 7 žmones, tarp kurių trys vienos lyties, o keturi kitos lyties ?

Ats.: **a)** $C_{13}^{3}+C_{10}^{4}$; **b)** $C_{13}^{3}\cdot C_{10}^{4}$; **c)** $C_{13}^{3}\cdot C_{10}^{4} + C_{13}^{4}\cdot C_{10}^{3}$.

23) Teatro salės pirmoje eilėje yra 20 kėdžių. Keliais būdais:

a) ant jų greta vienas kito gali susėsti 7 žmonės;

b) ant jų gali susėsti 7 žmonės ?

Ats.: **a)** A_{20}^{7}; **b)** C_{20}^{7}.

24) Sportinėje klasėje mokosi 13 vaikinų ir 7 merginos. Keliais būdais galima išrinkti 4 žmones dalyvauti varžybose, jeigu tarp jų turi būti du vaikinai, kurie mes diską ir bėgs 100 metrų, ir dvi merginos, kurios plauks, šoks į aukštį ? (Gali būti išrinkti bet kurie vaikinai ir bet kurios merginos.)

Ats.: $A_{13}^{2} \cdot A_{7}^{2}$.

25) Spynos kodą sudaro keturi skaitmenys. Keliais skirtingais kodais galima atrakinti šią spyną ?

Ats.: 10000.

26) Fotografuojama geriausių klasės mokinių - 8 berniukų ir 6 mergaičių - grupė. Fotografas nori į pirmąją eilę pasodinti dvi mergaites ir tris berniukus taip, kad vienos lyties asmenys nesėdėtų greta. Kiek yra pirmos eilės formavimo būdų ?

Ats.: 10080.

27) Kiek yra penkiaženklių skaičių, kurių užraše nėra:

a) 0;

b) 3 ?

Ats.: **a)** 9^5; **b)** $8 \cdot 9^4$.

28) Keliais būdais iš 36 kortų kaladės galima išrinkti:

a) 5 kortas;

b) 6 čirvus;

c) 2 kryžius ir 3 būgnus ?

Ats.: **a)** C_{36}^{5}, **b)** C_{9}^{6}, **c)** $C_{9}^{3} \cdot C_{9}^{2}$.

29) Keliais būdais iš 36 kortų kaladės galima išrinkti 7 kortas taip, kad tarp jų:

a) visi keturi karaliai;

b) nėra karalių;

c) tiktai vienas karalius;

d) nors vienas karalius ?

Ats.: **a)** C_{32}^{3}, **b)** $4 \cdot C_{32}^{6}$, **c)** C_{32}^{7}, **d)** $C_{36}^{7} - C_{32}^{7}$.

30) Tarp 36 numerių yra 5 laimingi. Keliais būdais galima išrinkti 5 numerius, kad tarp jų būtų:

a) 3 laimingi;
b) 4 laimingi;
c) 5 laimingi;
d) ne daugiau kaip 3 laimingi;
e) nors 4 laimingi.

Ats.: a) $A_5^3 \cdot C_{31}^2$; **b)** $C_5^4 \cdot C_{31}^1$; **c)** 1; **d)** $C_{36}^5 - \left(1 + C_5^4 \cdot C_{31}^1\right)$;

e) $1 + C_5^4 \cdot C_{31}^1$.

31) Nubrėžta 18 lygiagrečių tiesių ir dar 16 lygiagrečių tiesių, kertančių pirmąsias. Kiek susidarė lygiagretainių ?

Ats.: $C_{18}^2 \cdot C_{16}^2$.

32) Kokių devyniaženklių skaičių daugiau: ar tų, kurių užraše yra skaitmuo 5, ar tų, kurių užraše nėra skaitmens 5 ?

Ats.: daugiau tų, kurių užraše yra skaitmuo 5.

33) Keliais būdais galima septynis vienodus rutulius išdėlioti į 10 dėžių ? (Į vieną dėžę galima dėti kiek norime rutulių.)

Ats.: C_{16}^7.

34) Keliais būdais galima septynis skirtingus rutulius išdėlioti į 10 dėžių ? (Į vieną dėžę galima dėti kiek norime rutulių.)

Ats.: 7^{10}.

35) Keliais būdais galima 100 daiktų paskirstyti į 50 porų ? (Svarbi daiktų porose tvarka.)

Ats.: $\dfrac{100!}{2^{50}}$.

Tikimybių teorijos pradmenys

Pradinės tikimybių teorijos sąvokos

1. <u>Įvykis.</u> Tikimybių teorijoje įvykiais vadinami bandymo arba stebėjimo rezultatai.

1. Pavyzdys. Perkamas loterijos bilietas - bandymas. Laimės jis ar ne - galimi jo įvykiai.

2. Pavyzdys. Vieną kartą šauta į taikinį - bandymas. Kliudys ar ne to šūvio kulka taikinį - galimi jo įvykiai.

2. <u>Būtinasis įvykis.</u> Įvykis, kuris, atlikus bandymą, visada įvyksta, vadinamas būtinuoju įvykiu.

Pavyzdžiui, jei įvyko dviejų futbolo komandų susitikimas, tai įvykis, kad jis baigsis laimėjimu, pralaimėjimu, lygiosiomis, yra būtinasis įvykis.

3. <u>Negalimasis įvykis.</u> Jei, atlikus bandymą, įvykis niekada negali įvykti, tai jis vadinamas negalimuoju įvykiu.

Pavyzdžiui, metus vieną kartą monetą, įvykis - iškrito herbas ir skaičius yra negalimasis įvykis.

4. <u>Atsitiktinis įvykis.</u> Atsitiktiniu įvykiu vadiname kiekvieną įvykį, kuris atliekant bandymą gali įvykti, bet gali ir neįvykti.

Pavyzdžiui, žaidžiama šachmatų partija - bandymas. Tai, kad ji laimima, yra atsitiktinis įvykis, nes galimi pralaimėjimas, lygiosios.

Atsitiktiniai įvykiai žymimi raidėmis A, B, C, ...

5. <u>Nesutaikomi įvykiai.</u> Du įvykiai vadinami nesutaikomais jeigu jie nagrinėjamame bandyme negali įvykti vienu metu.

Pavyzdžiui, metant lošimo kauliukus, įvykiai A - atsivertė 4 akutės ir B - atsivertė pirminis akučių skaičius yra nesutaikomi įvykiai.

6. Elementarusis įvykis. Jei nekreipiame dėmesio į bandymo rezultatų konkretų turinį, o domimės, pasirodė ar nepasirodė vienas ar kitas rezultatas, tai gauname elementariojo įvykio sąvoką.

Tarkime, kad mus domina įvykis A - atsivertė pirminis akučių skaičius. Šis įvykis įvyks, jei įvyks bent vienas iš šių keturių įvykių:

E_1 - "atsivertė viena akutė".
E_2 - "atsivertė dvi akutės".
E_3 - "atsivertė trys akutės".
E_4 - "atsivertė penkios akutės".

Įvykiai E_1 E_2 E_3 E_4 yra nesutaikomi t.y. negali įvykti kartu. Tie įvykiai neskaidomi į "smulkesnius" įvykius ir vadinami elementariaisiais įvykiais.

Klasikinis įvykių tikimybės apibrėžimas

Apibrėžimas. Įvykio A, atliekant bandymą, kurio rezultatai vienodai tikėtini, tikimybe vadinamas elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A skaičiaus m ir visų elementariųjų įvykių skaičiaus n santykis.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

1. Uždavinys. Iš 30 egzamino bilietų, sunumeruotų nuo 1 iki 30, atsitiktinai traukiamas vienas. Kokia tikimybė, kad ištraukto bilieto numeris yra 3 kartotinis ?

Sprendimas. Atliekamas bandymas, ištraukiamas vienas bilietas. Kadangi bilietas traukiamas atsitiktinai, tai visi bandymo rezultatai vienodai tikėtini ir nesutaikomi. Visų galimų elementariųjų įvykių skaičius lygus 30. Įvykis A reiškia, kad ištraukto bilieto numeris 3 kartotinis. Yra 10 elementariųjų įvykių palankių įvykiui A, t.y. kai ištraukto bilieto numeriai yra 3; 6; 9; ... ; 30. Ieškoma tikimybė lygi $P(A)=\frac{10}{30}$,

$$P(A)=\frac{1}{3}.$$

Ats.: $\frac{1}{3}$.

2. Uždavinys. Keturios raidės a, a, m, m, parašytos ant kortelių, sudėtos į maišelį, atsitiktinai traukiamos ir dedamos viena po kitos. Kokia tikimybė, kad sudėsime žodį *mama* ?

Sprendimas. Sunumeruokime 4 korteles su raidėmis.

1	2	3	4
a	a	m	m

Jas galima keisti vietomis 4! būdų.
Iš 24 atvejų žodį *mama* galima sudėti 4 būdais.

3 1 4 2   4 1 3 2   3 2 4 1   4 2 3 1
m a m a   m a m a   m a m a   m a m a

Tikimybė įvykio A, kad išeis žodis *mama*, lygi $P(A)=\frac{4}{4!}$;

$P(A)=\frac{1}{6}$.

Ats.: $\frac{1}{6}$

3. ***<u>Uždavinys.</u>*** Kubas, kurio visos briaunos nudažytos, supjaustytas į tūkstantį vienodo dydžio kubelių, kurie sumaišomi. Po to atsitiktinai traukiamas vienas kubelis. Raskite tikimybę įvykio, kad atsitiktinai ištrauktas kubelis turi:

a) vieną dažytą sieną;
b) dvi dažytas sienas;
c) tris dažytas sienas.

<u>Sprendimas.</u>

a) Kubelių, turinčių vieną dažytą sieną, skaičius lygus 384, todėl palankių įvykiui A elementariųjų įvykių yra 384. Visų galimų elementariųjų įvykių yra 1000.

Įvykis A – "atsitiktinai ištrauktas kubelis turi vieną dažytą sieną", tai

$$P(A)=\frac{384}{1000};\quad P(A)=0{,}384.$$

b) Įvykiui B palankių elementariųjų įvykių skaičius m lygus 96. Iš viso elementariųjų įvykių skaičius n lygus 1000.

Įvykis B – "atsitiktinai ištrauktas kubelis turi dvi dažytas sienas", tai

$$P(B)=\frac{96}{1000};\quad P(B)=0{,}096.$$

c) m = 8; n = 1000.

Įvykis C – "atsitiktinai ištrauktas kubelis turi tris dažytas sienas", tai

$$P(C)=\frac{8}{1000};\quad P(C)=0{,}008.$$

Ats.: ***a)*** 0,384; ***b)*** 0,096; ***c)*** 0,008.

4. <u>Uždavinys.</u> Metami du lošimo kauliukai. Raskite įvykio, kad atsivertusių akučių ant sienų skaičių suma lyginė, be to, bent ant vieno kauliuko sienos atsivers 6 akutės, tikimybę.

<u>Sprendimas.</u> Metus pirmąjį lošimo kauliuką gali atsiversti viena, dvi, trys, ... , šešios akutės. Iš viso 6 galimybės. Metus antrąjį lošimo kauliuką yra taip pat 6 galimybės atsiversti akučių skaičiui. Iš viso yra 6 · 6 = 36 elementarieji įvykiai.

Palankūs yra šie 5 įvykiai (pirmas skaičius yra atsivertusių akučių ant pirmojo kauliuko skaičius, antras skaičius yra atsivertusių šių akučių ant antrojo kauliuko skaičius):

1) 6, 2; **2)** 6, 4; **3)** 6, 6; **4)** 2, 6; **5)** 4, 6.

Vadinasi, m = 5; n = 36;

$$P=\frac{5}{36}.$$

Ats.: $\frac{5}{36}$.

5. <u>Uždavinys.</u> Dėžutėje yra šeši vienodi sunumeruoti kubeliai. Atsitiktinai po vieną traukiami visi kubeliai. Raskite tikimybę, kad ištrauktųjų kubelių numeriai sudarys didėjančią seką.

<u>Sprendimas.</u> Palankus elementarusis įvykis yra vienas:

m = 1.

Iš viso įvykių yra : n = 6!

Ieškoma tikimybė $P=\frac{1}{720}$.

Ats.: $\frac{1}{720}$.

6. Uždavinys. Metami du lošimo kauliukai ir suskaičiuojama atsivertusių akučių suma. Kas labiau tikėtina: gauti sumą 7 ar 8 ?

Sprendimas: Iš viso yra $6 \cdot 6 = 36$ elementarieji įvykiai. Vadinasi, $n = 36$. Įvykiui A "atsivertusių akučių suma lygi 7" palankūs šie įvykiai (1; 6); (2; 5); (3; 4); (4; 3); (5; 2) ir (6; 1). Todėl $m = 6$.

Tada $P(A) = \frac{6}{36}$; $P(A) = \frac{1}{6}$.

Įvykiui B "atsivertusių akučių suma lygi 8" palankūs šie įvykiai: (2; 6); (3; 5); (4; 4); (5; 3); (6; 2). Todėl $m = 5$.

Tada $P(B) = \frac{5}{36}$. Labiau tikėtina, kad atsivertusių akučių suma bus lygi 7.

Ats.: 7.

7. Uždavinys. Lošimo kauliukas metamas tris kartus. Po pirmųjų dviejų metimų kauliuko atsivertusių akučių skaičių suma lygi po trečiojo metimo atsivertusio kauliuko akučių skaičiui. Raskite tikimybę, kad iškrito bent vieną kartą 2 akutės.

Sprendimas. Galimi 15 atvejai, kai po pirmųjų dviejų metimų atsivertusių akučių skaičių suma lygi po trečiojo metimo atsivertusių akučių skaičiui.

1 1 2	2 1 3	3 1 4	4 1 5	5 1 6
1 2 3	2 2 4	3 2 5	4 2 6	
1 3 4	2 3 5	3 3 6		
1 4 5	2 4 6			
1 5 6				

Bent vieną kartą iškrinta dvi akutės 8 kartus. Tada ieškoma tikimybė yra $P = \frac{8}{15}$.

Ats.: $\frac{8}{15}$.

8. Uždavinys. Iš 2000 pažymėtų apskritimo taškų atsitiktinai pasirenkami keturi skirtingi taškai A, B, C ir D. Kokia tikimybė, kad stygos AB ir CD kertasi ?

Sprendimas. Atsitiktinai pasirinkus 4 taškus A, B, C ir D galimi 6 jų tarpusavio išsidėstymo apskritime atvejai: ACBD, ADBC, ABCD, ADCB, ABDC, ACDB. Tik dviem pirmaisiais atvejais stygos kertasi.

Vadinasi, ieškomo įvykio tikimybė: $P = \frac{2}{6}, P = \frac{1}{3}$.

Ats.: $\frac{1}{3}$.

9. Uždavinys. Knygų lentynoje atsitiktinai sudėtos 4 algebros knygos ir trys geometrijos knygos. Kokia įvykio, kad vieno dalyko knygos bus greta, tikimybė ?

Sprendimas. 7 knygas lentynoje galima sudėti 7! būdais. Randame palankių įvykių skaičių: algebros knygas tarpusavyje keisti yra 4! būdai, o geometrijos - 3! būdai. Algebros knygų komplektas gali būti sukeistas su geometrijos knygų komplektu 2 būdais.

Vadinasi, $m = 2 \cdot 4! \cdot 3!$

Ieškomo įvykio tikimybė lygi: $P = \frac{2 \cdot 4! \cdot 3!}{7!} \approx 0{,}057$.

Ats.: 0,057.

10. Uždavinys. Dėžėje yra 10 vienodų detalių, sunumeruotų 1, 2, ... ,10. Atsitiktinai traukiamos 6 detalės. Raskite įvykio, kad tarp ištrauktų detalių bus Nr. 1 detalė, tikimybę.

Sprendimas. Visų galimų elementariųjų įvykių skaičius yra lygus $n = C_{10}^6$. Ieškome palankių įvykių skaičiaus: tarp ištrauktųjų detalių yra 1 detalė, o likusios 5 detalės, pažymėtos kitais numeriais. Tokių įvykių skaičius lygus galimybių ištraukti penkias detales iš likusių devynių (be 1 detalės) skaičiui, t.y. $m = C_9^5$.

Vadinasi, ieškomoji tikimybė lygi:

$$P = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = \frac{C_9^4}{C_{10}^4} = 0{,}6.$$

Priešingo įvykio tikimybė

Apibrėžimas. Įvykis, kuris vyksta tada ir tik tada, kada neįvyksta A, vadinamas įvykiui A priešingu įvykiu ir žymimas $\overline{A}$.

Pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Įvykis A - "iškrito lyginis akučių skaičius". Įvykis $\overline{A}$ reiškia, kad iškrito nelyginis akučių skaičius.

Sakykime, iš n galimų įvykių yra m įvykiui A palankių elementariųjų įvykių. Vadinasi, įvykiui $\overline{A}$ yra n - m palankių įvykių.

Tada: $P(\overline{A}) = \dfrac{n-m}{n} = 1 - \dfrac{m}{n} = 1 - P(A)$ arba $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

1. Uždavinys. Atsitiktinai parenkamas triženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad bent du jo skaitmenys sutaps ?

Sprendimas. Natūralųjį skaičių nuo 100 iki 999 galima parinkti 900 būdų, t.y. n = 900. Įvykis A - "parinktojo skaičiaus bent du skaitmenys sutampa". Patogiau apskaičiuoti įvykiui A priešingo įvykio $\overline{A}$ "parinktojo skaičiaus visi skaitmenys skirtingi" tikimybę. Vadinasi, $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8$, nes pirmoje vietoje negali būti nulis. $m = 9^2 \cdot 8$.

Tada $P(\overline{A}) = \dfrac{9^2 \cdot 8}{900} = 0{,}72$,

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$,

$P(A) = 0{,}28$.

Ats.: 0,28.

2. Uždavinys. Bibliotekos lentynoje bet kokia tvarka sustatyti 15 vadovėlių, kurių 5 įrišti. Bibliotekininkė atsitiktinai paima tris vadovėlius. Raskite įvykio A, kad bent vienas paimtų vadovėlių įrištas, tikimybę.

Sprendimas. Įvykis A – "nors vienas iš paimtų trijų vadovėlių įrištas" ir $\overline{A}$ - "nė vienas iš paimtų trijų vadovėlių neįrištas".

$$P(\overline{A})=\frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 3!}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 3!}=\frac{24}{91}.$$

Ieškoma tikimybė

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{24}{91}.$$

$$P(A)=\frac{67}{91}.$$

Ats.: $\frac{67}{91}$.

3. <u>Uždavinys</u>. Tikimybė, kad mokinys išlaikys pirmąjį egzaminą, lygi 0,9, antrąjį egzaminą - 0,8 ir trečiąjį egzaminą - 0,7. Kokia tikimybė, kad mokinys išlaikys bent vieną egzaminą ?

Sprendimas. Įvykiai - mokinys išlaikys bent vieną egzaminą ir mokinys neišlaikys nė vieno egzamino - yra priešingi. Įvykio, kad mokinys neišlaikys pirmojo egzamino, tikimybė lygi 0,1, antrojo - 0,2 ir trečiojo - 0,3. Įvykio, kad mokinys neišlaikys nė vieno egzamino, tikimybė, lygi $0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}006$. Tada ieškomo įvykio tikimybė, kad mokinys išlaikys bent vieną egzaminą, tikimybė lygi $1-0{,}006=$ $=0{,}994$.

Ats.: 0,994.

Nesutaikomų įvykių sumos tikimybė

Du įvykiai, kurie negali įvykti vienu metu, vadinami nesutaikomais. k įvykiai vadinami nesutaikomais, jei bet kurie du iš šių įvykių yra nesutaikomi.

Apibrėžimas. Įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kada įvyksta bent vienas iš įvykių A arba B, vadinamas jų suma. Žymimas taip:

$$A + B.$$

Teorema. Dviejų nesutaikomų įvykių sumos tikimybė lygi šių įvykių tikimybių sumai:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Įrodymas. Sakykime, n - visų galimų bandymo įvykių skaičius, m_1 - įvykiui A palankių įvykių skaičius, m_2 - įvykiui B palankių įvykių skaičius.

Yra $m_1 + m_2$ įvykiui A + B palankių įvykių. Todėl:

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

Teorema įrodyta.

1. Uždavinys. Dėžėje yra 10 detalių, iš kurių 4 dažytos. Darbininkas atsitiktinai ištraukė tris detales. Raskite įvykio, kad bent viena paimta detalė yra dažyta, tikimybę.

Sprendimas. Įvykis A - "ištraukta viena dažyta detalė".

$$P(A)=\frac{4\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}.$$

Įvykis B - "ištrauktos dvi dažytos detalės".

$$P(B)=\frac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}.$$

Įvykis C - "ištrauktos trys dažytos detalės".

$$P(C)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}.$$

Įvykis A + B + C - "ištrauktos viena arba dvi, arba trys dažytos detalės".

Tada $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$;

$$P(A+B+C)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30},$$

$$P(A+B+C)=\frac{5}{6}.$$

Ats.: $\frac{5}{6}$.

2. *Uždavinys.* Loterijoje yra 1000 bilietų. Iš jų vienas bilietas išlošia 300 Lt, 5 bilietai po 100 Lt, 20 bilietų po 50 Lt, 50 bilietų po 20 Lt, 60 bilietų po 10 Lt, 100 bilietų po 5 Lt. Vytas nusipirko 1 bilietą. Raskite tikimybę įvykio, kad jis išloš ne mažiau kaip 20 Lt.

Sprendimas.

Įvykis A - "išlošia ne mažiau kaip 20 Lt".
Įvykis B - "išlošia 20 Lt".
Įvykis C - "išlošia 50 Lt".
Įvykis D - "išlošia 100 Lt".
Įvykis E - "išlošia 300 Lt".

Aišku, A = B + C + D + E. Įvykiai A, B, C, D ir E nesutaikomi, tai:

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D)+P(E);$$

$$P(B)=\frac{50}{1000}=0{,}05;$$

$$P(C)=\frac{20}{1000}=0{,}02;$$

$$P(D)=\frac{5}{1000}=0{,}005;$$

$$P(E)=\frac{1}{1000}=0{,}001.$$

Tada $P(A)=0{,}05+0{,}02+0{,}005+0{,}001=0{,}076$.

Ats.: 0,076.

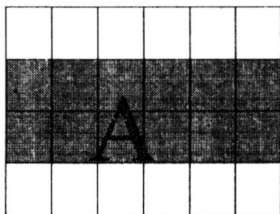
Nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė

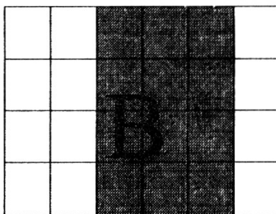
Įvykiai A ir B vadinami tarpusavy nepriklausomais, jei vieno jų tikimybė nepriklauso nuo to, ar antrasis įvyko, ar neįvyko.

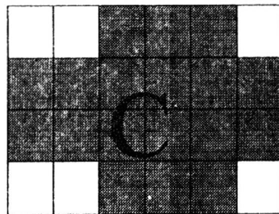
Teorema. Nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sandaugai:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Pavyzdžiui, brėžiniuose **a)** ir **b)** pavaizduoti nepriklausomi įvykiai A ir B.







a) **b)** **c)**

Matome, kad $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$.

Iš brėžinio **c)** matome, kad $P(AB) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Vadinasi, $P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

1. Uždavinys. Metama moneta ir lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad atsivers herbas, lošimo kauliuko lyginis akučių skaičius ?

Sprendimas.

Įvykis A - "atsivertė herbas".

$$P(A) = \frac{1}{2};$$

Įvykis B - "atsivertė lyginis akučių skaičius" .

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};$$

Įvykis AB - "atsivertė herbas ir lyginis akučių skaičius".
A ir B nepriklausomi įvykiai, todėl

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

2. Uždavinys. Tikimybė pataikyti į taikinį šaunant vieną kartą lygi 0,8. Kokia tikimybė pataikyti į taikinį bent vieną kartą šaunant du kartus ?

I sprendimo būdas:

Įvykis A - "pataikymas pirmuoju šūviu".

$$P(A)=0{,}8; \qquad P(\overline{A})=0{,}2.$$

Įvykis B - "pataikymas antruoju šūviu".

$$P(B)=0{,}8; \qquad P(\overline{B})=0{,}2.$$

Įvykis $(\overline{A}\overline{B})$ - “nepataikymas nė vienu šūviu”. Tada ieškoma tikimybė $P=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}96.$

II sprendimo būdas:

$$P(A)=0{,}8$$

$$P(\overline{A})=0{,}2$$

$$P(B)=0{,}8$$

$$P(\overline{B})=0{,}2$$

Ieškoma tikimybė:

$$P=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)+P(A)\cdot P(B)=$$

$$=0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}96.$$

3. Uždavinys: Įrengtos dvi signalizacijos, duodančios signalą per avariją. Įvykio, kad per avariją duos signalą pirmoji signalizacija,

tikimybė lygi 0,95, kad antroji - 0,9. Raskite įvykio, kad per avariją signalą duos tik viena signalizacija, tikimybę.

Sprendimas. Įvykis A - "signalą duos pirmoji signalizacija".

$$P(A)=0{,}95; \quad P(\overline{A})=0{,}05.$$

Įvykis B - "signalą duos antroji signalizacija".

$$P(B)=0{,}9; \quad P(\overline{B})=0{,}1.$$

Ieškoma tikimybė:

$$P=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(B)\cdot P(\overline{A})=0{,}95\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}05=0{,}14.$$

Ats.: 0,14.

4. Uždavinys. Įrengimą sudaro trys elementai, veikiantys nepriklausomai vienas nuo kito. Tikimybės be gedimų veikti (per laiką t) pirmajam, antrajam ir trečiajam elementams atinkamai lygios 0,6; 0,7; 0,8. Raskite tikimybę įvykių, kad per laiką t be gedimų veiks: **a)** tiktai vienas elementas;

b) tiktai du elementai;

c) visi trys elementai.

Sprendimas. Įvykis A - "laike t be gedimų veiks tik pirmasis elementas". $P(A)=0{,}6; \quad P(\overline{A})=0{,}4.$

Įvykis B - "laike t be gedimų veiks tik antrasis elementas.

$$P(B)=0{,}7; \quad P(\overline{B})=0{,}3.$$

Įvykis C - " laike t be gedimų veiks tik trečiasis elementas".

$$P(C)=0{,}8; \quad P(\overline{C})=0{,}2.$$

a) $P = 0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}188$,
b) $P = 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 + 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4 = 0{,}452$,
c) $P = 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}336$.

Ats.: **a)** 0,188; **b)** 0,452; **c)** 0,336.

Pastaba. Kada įvykiai A ir B sutaikomi, jų sumos tikimybė skaičiuojama pagal formulę: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Uždavinys. Du medžiotojai vienu metu nepriklausomai vienas nuo kito šauna į kiškį. Kiškis nušaunamas, kai nors vienas medžiotojas pataiko. Raskite įvykio nušauti kiškį tikimybę, kai medžiotojų pataikymo tikimybės yra lygios 0,8 ir 0,75.

Sprendimas. Įvykis A - "pataikė pirmasis medžiotojas".
Įvykis B - "pataikė antrasis medžiotojas".

A ir B sutaikomi įvykiai, todėl

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}8+0{,}75-0{,}8\cdot 0{,}75=0{,}95.$$

Pastaba. Nebūtina taikyti šią formulę. Galima spręsti taip:

$$P(A)=0{,}8;\ P(\overline{A})=0{,}2.$$

$$P(B)=0{,}75;\quad P(\overline{B})=0{,}25.$$

Įvykis $\overline{A}\overline{B}$ - "nepataikė nė vienas medžiotojas".

$$P(\overline{A}\overline{B})=0{,}2\cdot 0{,}25=0{,}05.$$

Ieškoma tikimybė P = 1 - 0,05 = 0,95.

Ats.: 0,95.

Sąlyginė tikimybė

Sakykime, reikia rasti tikimybę įvykio A, kai žinoma, kad įvyko įvykis B.

Pavyzdžiui, iš 32 kortų kaladės viena po kitos traukiamos dvi kortos. Įvykio B - "antroji korta karalius" tikimybė priklauso nuo to, ar įvyko, ar neįvyko įvykis. A - "pirmoji korta karalius". Jei A įvyko, tarp likusių 31 kortos yra tik trys karaliai, todėl $P(B)=\frac{3}{31}$, o jei A neįvyko, tai $P(B)=\frac{4}{31}$.

Įvykio A tikimybė su sąlyga, kad įvyko įvykis B, vadinama sąlygine tikimybe ir žymima P(A/B).

Teorema. Sąlyginei tikimybei teisinga formulė

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Įrodymas. Sakykime, kad n - visų elementariųjų įvykių skaičius, iš jų m - palankių įvykiui B įvykių skaičius, k - įvykių, palankių įvykių AB, skaičius.

Tada $P(A/B)=\frac{k}{m}$

arba $P(A/B)=\dfrac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}}=\dfrac{P(AB)}{P(B)}.$

1. Uždavinys. Firmoje dirba 7 vyrai ir 3 moterys. Atsitiktinai pagal tabelio numerius išrenkami trys žmonės. Raskite įvykio, kad visi trys išrinktieji yra vyrai, tikimybę.

Sprendimas. Įvykis A - "pirmasis išrinktasis vyras".
Įvykis B - "antrasis išrinktasis vyras".
Įvykis C - "trečiasis išrinktasis vyras".

$$P(A)=\frac{7}{10}.$$

Tikimybė, kad antrasis vyras išrinktas su sąlyga, kai pirmasis išrinktasis - vyras, yra $P(A/B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Tikimybė, kad trečiasis išrinktas vyras su sąlyga, kai jau du išrinktieji - vyrai, t.y. $P(C/AB)=\frac{5}{8}$.

Ieškomoji tikimybė, kad visi trys išrinktieji yra vyrai, lygi:

$$P(ABC)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24};$$

$$P(ABC)=\frac{7}{24}.$$

Ats.: $\frac{7}{24}$.

2. *Uždavinys.* Jono draugai gyvena viename iš 50 namų, kurių numeriai nuo 1 iki 50. Kiekviename iš šių namų yra po 100 butų, kurių numeriai nuo 1 iki 100. Kur gyvena Jono draugai, tiksliai nežinoma. Jonui žinoma, kad:

a) I draugo buto numeris baigėsi skaitmeniu 3;

b) II draugo namo numeris II namo dalijasi iš 5, o jo buto numeris dalijasi iš 2;

c) III draugo buto ir namo numerių suma lygi 100.

Kuriuo šių atvejų tikimybė patekti pirmu bandymu į Jonui reikalingą butą yra didžiausia ?

Sprendimas. Įvykis A - "buto numeris baigiasi skaitmeniu 3". Visų galimų įvykių skaičius lygus $50 \cdot 10 = 500$.

Įvykis B - "namo numeris dalijasi iš 5, o buto numeris dalijasi iš 2". Visų galimų įvykių skaičius lygus $10 \cdot 50 = 500$.

Įvykis C - "namo ir buto numerių suma lygi 100". Visų galimų įvykių skaičius lygus 50.

Įvykis D - "galimybė iš pirmo karto patekti į reikalingą butą".

Ieškomosios tikimybės lygios:

$$P(D/A)=\frac{1}{500};\quad P(D/B)=\frac{1}{500};$$

$$P(D/C)=\frac{1}{50}.$$

Vadinasi, C atveju didžiausia galimybė iš pirmo karto patekti į reikiamą butą.

Ats.: C.

3. <u>Uždavinys.</u> Mokyklos skaitykloje yra 6 matematikos vadovėliai, kurių 3 įrišti. Moksleivis atsitiktinai paėmė 2 vadovėlius. Raskite įvykio, kad abu vadovėliai bus įrišti, tikimybę.

<u>Sprendimas.</u> Įvykis A - "pirmasis paimtas vadovėlis įrištas".
Įvykis B - "antrasis paimtas vadovėlis įrištas".

Tikimybė, kad pirmasis paimtas vadovėlis įrištas, lygi

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Tikimybė, kad antrasis paimtas vadovėlis įrištas su sąlyga, jog pirmasis paimtas vadovėlis įrištas, t.y. sąlyginė tikimybė, lygi:

$$P(A/B)=\frac{2}{5}.$$

Ieškoma tikimybė, kad abu paimti vadovėliai įrišti, lygi:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(A/B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=0{,}2;$$

$$P(AB)=0{,}2.$$

Ats.: 0,2.

Pilnos tikimybės formulė

Tikimybę įvykio A, pasirodančio kartu su vienu iš įvykių H_1, $H_2,\ldots,H_n$, kuris sudaro pilną tarpusavyje nesutaikomų įvykių grupę, randame pagal formulę:

$$P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)+\ldots+P(A/H_n)\cdot P(H_n),$$

kur $P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1$.

Įrodymas. Pagal sąlygą įvykis A gali įvykti tik kartu su vienu iš įvykių $H_1, H_2,\ldots H_n$. Aišku, įvykis yra arba AH_1, arba AH_2, ..., arba AH_n.

Tada $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$.

Kadangi įvykiai $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tarpusavyje nesutaikomi, tai tarpusavyje nesutaikomi ir įvykiai AH_1, AH_2, ..., AH_n. Todėl pagal sudėties taisyklę:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Kadangi $P(AH_1) = P(A/H_1)\cdot P(H_1)$;

$$P(AH_2)=P(A/H_2)\cdot P(H_2),\ \ldots\ P(AH_n) = P(A/H_n)\cdot P(H_n),$$

tai $P(A) = P(A/H_1)\cdot P(H_1) + P(A/H_2)\cdot P(H_2) + \ldots + P(A/H_n)\cdot P(H_n)$.

1. Uždavinys. Į dėžę su dviem rutuliais įdėtas baltas rutulys. Po to iš jos atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys. Raskite tikimybę įvykio, kad ištrauktas baltas rutulys (samprotavimai (hipotezės) apie iš pradžių buvusių dėžėje rutulių spalvą yra vienodai galimi).

Sprendimas. Pažymime įvykį A - "ištrauktas baltas rutulys". Galimi tokie samprotavimai apie rutulių, buvusių dėžėje iš pradžių, spalvą: H_1 - baltų rutulių nėra; H_2 - vienas baltas rutulys; H_3 - du balti rutuliai.

Visos trys hipotezės yra vienodai galimos, tai

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Sąlyginė tikimybė, kad bus ištrauktas baltas rutulys su sąlyga, kad pradžioje nebuvo balto rutulio, lygi: $P(A/H_1)=\frac{1}{3}$.

Sąlyginė tikimybė, kad bus ištrauktas baltas rutulys su sąlyga, kad iš pradžių dėžėje buvo vienas baltas rutulys, lygi: $P(A/H_2)=\frac{2}{3}$.

Sąlyginė tikimybė, kad bus ištrauktas baltas rutulys su sąlyga, kad iš pradžių dėžėje buvo du balti rutuliai, lygi: $P(A/H_3)=\frac{3}{3}=1$.

Tikimybę įvykio A, kad bus ištrauktas baltas rutulys, randame pagal pilnos tikimybės formulę:

$$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) + P(A/H_3) \cdot P(H_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3};\ P(A)=\frac{2}{3}.$$

Ats.: $\frac{2}{3}$.

2. <u>Uždavinys.</u> Iš 50 detalių 18 pagaminta pirmajame ceche, 20 - antrajame, o likusios - trečiajame. Pirmasis ir trečiasis cechai išleidžia puikios kokybės produkciją su tikimybe 0,9, antrasis - su tikimybe 0,6. Raskite įvykio, kad atsitiktinai paimta detalė yra puikios kokybės, tikimybę.

<u>Sprendimas.</u> Įvykis A - "paimta detalė yra puikios kokybės".

Įvykiai H_1, H_2, H_3 - "paimta detalė pagaminta atsitiktinai pirmajame, antrajame arba trečiajame cechuose". Tada

$$P(H_1)=\frac{18}{50},\ P(H_2)=\frac{20}{50},\ P(H_3)=\frac{12}{50}.$$

Įvykio A sąlyginės tikimybės lygios:

$$P(A/H_1) = 0{,}9;\ P(A/H_2) = 0{,}6;\ P(A/H_3) = 0{,}9.$$

Ieškoma tikimybė:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$

$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{18}{50}+\frac{6}{10}\cdot\frac{20}{50}+\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{50}=\frac{39}{50}=0{,}78;$$

$$P(A)=0{,}78.$$

Ats.: 0,78.

Bernulio formulė

Atliekama n nepriklausomų bandymų. Kuriame nors bandyme dominantis įvykis A įvyksta su tikimybe P. Kokia tikimybė, kad įvykis A įvyks lygiai k kartų ($0 \le k \le n$) ?

Į šį klausimą padeda atsakyti Bernulio formulė:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ čia } q = 1 - p.$$

1. Uždavinys. Du vienodo pajėgumo šachmatininkai žaidžia šachmatais. Kas labiau tikėtina: laimėti dvi partijas iš keturių ar tris partijas iš šešių (į lygiąsias nekreipiama dėmesio) ?

Sprendimas. Kadangi šachmatininkai vienodo pajėgumo, tai tikimybė laimėti lygi $p = \frac{1}{2}$, tikimybė pralaimėti $q = \frac{1}{2}$.

Randame įvykio, kad dvi partijos iš keturių bus laimėtos, tikimybę.

Čia $n = 4$; $k = 2$; $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$.

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Randame įvykio, kad bus laimėtos trys partijos iš šešių, tikimybę. Čia $n = 6$, $k = 3$, $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$.

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Gavome $P_4(2) > P_6(3)$.

Vadinasi, labiau tikėtina laimėti dvi partijas iš keturių negu tris iš šešių.

Ats.: Dvi partijas iš keturių.

2. Uždavinys. Šaulio pataikymo į taikinį tikimybė lygi 0,6. Raskite tikimybę, kad, šovęs 4 kartus, jis pataikys ne mažiau kaip 3 kartus.

Sprendimas. Pagal uždavinio sąlygą $n = 4$, $k \geq 3$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. Tada

$$P_4(k \geq 3) = C_4^3 p^3 q + C_4^4 p^4 q^0 = 4 \cdot (0{,}6)^3 \cdot 0{,}4 + (0{,}6)^4 = 0{,}4752.$$

$$P_4(k \geq 3) = 0{,}4752.$$

Ats.: 0,4752.

Įvairūs tikimybių teorijos uždaviniai

1. Uždavinys. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinkto triženklio skaičiaus, sudaryto iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, užraše yra du vienodi skaitmenys ?

Sprendimas. Tai ekvivalentu tokiam procesui: 9 kortelės, ant kurių parašyti skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sudedamos į dėžę. Po to atsitiktinai traukiama kortelė, jos skaitmuo užrašomas ir vėl kortelė dedama į dėžę. Traukiama antra kortelė, užrašomas jos skaitmuo ir vėl kortelė dedama į dėžę. Traukiama trečia kortelė ir užrašomas jos skaitmuo. Skaitmenys užrašomi eilės tvarka. Iš viso elementariųjų įvykių yra $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$.

Skaičiuojame palankius įvykius: du skirtingus skaitmenis iš devynių galime išrinkti $C_9^2 = 36$ būdais.

Iš dviejų skirtingų skaitmenų galime sudaryti $C_3^2 \cdot 1 = 3$ skirtingus triženklius skaičius, kur pirmasis skaitmuo kartojasi du kartus, ir 3 skirtingus triženklius skaičius, kur antrasis skaitmuo kartotųsi du kartus.

Tada palankių įvykių yra $36 \cdot 3 + 36 \cdot 3 = 216$.

Ieškomoji tikimybė $P = \frac{216}{729} = \frac{8}{27}$.

Ats.: $\frac{8}{27}$.

2. Uždavinys. Jonas, Antanas ir dar 8 žmonės stovi eilėje. Raskite tikimybę, kad Jonas ir Antanas atskirti 3 žmonių.

Sprendimas. Iš viso elementariųjų įvykių yra 10!.

Skaičiuojame palankių įvykių skaičių: Joną, Antaną ir tarp jų esančius tris žmones laikome vienu elementu. Tada 6 elementus galime keisti tarpusavyje vietomis 6! būdais. Antaną ir Joną galime keisti vietomis 2 būdais. Tris žmones, stovinčius tarp Jono ir Antano, iš 8 žmonių galime išrinkti C_8^3 būdais. 3 žmones, stovinčius tarp Jono ir Antano, galima keisti tarpusavyje 3! būdais.

Tada pagal daugybos taisyklę palankių įvykių yra

$$3!\,C_8^3\cdot 6!\cdot 2=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 6!\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1=8!\cdot 12.$$

Vadinasi, įvykio tikimybė lygi:

$$P=\frac{12\cdot 8!}{10!}=\frac{12}{10\cdot 9}=\frac{2}{15}.$$

Ats.: $\frac{2}{15}$.

3. Uždavinys. Batų dėžėje yra 10 porų skirtingų rūšių batų. Iš jų atsitiktinai paimami 4 batai. Rasti tikimybę, kad tarp paimtų batų nebus vienos poros batų.

Sprendimas. 4 batus iš 20 galima išrinkti C_{20}^4 būdais. Vadinasi, elementariųjų įvykių skaičius lygus: $n=C_{20}^4$.

Randame palankių įvykių skaičių: keturias batų poras iš 10 porų galime išrinkti C_{10}^4 būdais. Iš kiekvienos batų poros dviem būdais galime išrinkti vieną batą (kairįjį arba dešinįjį). Aišku, 4 skirtingų porų batus iš 4 porų batų galima išrinkti 2^4 būdais. Tada $m=C_{10}^4\cdot 2^4$.

Ieškomoji tikimybė lygi: $p=\frac{C_{10}^4\cdot 2^4}{C_{20}^4}$.

Ats.: $\frac{C_{10}^4\cdot 2^4}{C_{20}^4}$.

4. Uždavinys. Iš žodžio *Vaiva* raidžių atsitiktinai parinktos 3 raidės ir sudėtos į eilę. Kokia tikimybė, kad išeis žodis *iva* ?

Sprendimas. Kad atskirtume vienodas raides vieną nuo kitos, sunumeruojame: a_1, a_2, v_1, v_2. Iš viso yra $A_5^3=60$ elementariųjų įvykių.

Žodis *iva* išeis $1\cdot 2\cdot 2=4$ atvejais (iv_1a_1; iv_1a_2, iv_2a_1; iv_2a_2).

Ieškomoji tikimybė lygi: $p = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$.

Ats.: $\frac{1}{15}$.

5. ***Uždavinys.*** Turime du šešiasienius lošimo kauliukus. Pirmojo lošimo kauliuko keturios sienos nudažytos mėlynai, kitos dvi - raudonai. Antrojo lošimo kauliuko dvi sienos nudažytos mėlynai, o keturios - raudonai. Metami abu lošimo kauliukai.

1. Parodykite, kad įvykio "abiejų kauliukų atsivertė raudona spalva nudažytos sienos" tikimybė lygi: $\frac{2}{9}$.

2. Kuris iš dviejų įvykių tikėtinas:

A - "abu kauliukai atsivers ta pačia spalva nudažytomis sienomis";

B - "abu kauliukai atsivers skirtinga spalva nudažytomis sienomis".

3. Tęsdami eksperimentą, pirmojo kauliuko sienų spalvos nekeičiame, o dalį antrojo kauliuko sienų perdažome. Kiek antrojo kauliuko sienų turi būti nudažytos raudonai ir kiek mėlynai, kad, metant abu kauliukus kartu, tikimybė iškristi ta pačia spalva nudažytoms sienoms būtų lygi tikimybei iškristi skirtingomis spalvomis nudažytoms sienoms ?

Sprendimas.

1. Tikimybė, kad "pirmasis kauliukas atsivertė raudona spalva dažyta siena", lygi $\frac{2}{6}$. Tikimybė, kad "antrasis kauliukas atsivertė raudona spalva dažyta siena", lygi $\frac{4}{6}$. Pagal įvykių sandaugos taisyklę ieškoma tikimybė lygi: $P = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$.

2. Pagal įvykių sandaugos ir sumos taisykles

$$P(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}.$$

Įvykis B yra priešingas įvykiui A, todėl

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

3. Sakykime, kad ir antrojo kauliuko sieną reikia perdažyti raudonai. Tada įvykio "abu kauliukai atsivertė ta pačia spalva nudažytomis sienomis" tikimybė lygi:

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{6-n}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{n}{6} = \frac{24-4n}{36} + \frac{2n}{36} = \frac{24-2n}{36}.$$

Įvykio "abu kauliukai atsivertė skirtingomis spalvomis nudažytomis sienomis" tikimybė lygi:

$$1 - \frac{24-2n}{36} = \frac{12+2n}{36}.$$

Tada $\frac{24-2n}{36} = \frac{12+2n}{36}$,

$4n = 12$,
$n = 3$.

Ats.: **1)** $\frac{2}{9}$. ; **2)** įvykis B; **3)** 3 antrojo kauliuko sienas reikia nudažyti raudonai ir tris mėlynai.

6. ***<u>Uždavinys.</u>*** Dėžutėje yra 2 raudoni, 3 mėlyni ir 2 žali pieštukai. Iš jos atsitiktinai be grąžinimo išimame vieną po kito pieštuką. Raskite tikimybę, kad raudonas pieštukas bus ištrauktas anksčiau negu mėlynas.

<u>Sprendimas.</u> Raudonas pieštukas bus ištrauktas anksčiau negu mėlynas tuo atveju, kai pirmas bus ištrauktas raudonas pieštukas arba pirmas - žalias, po to raudonas, arba pirmas ir antras ištraukti pieštukai bus žali, o trečias raudonas. Tada ieškoma tikimybė lygi:

$$P = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = 0,4.$$

Vadinasi, $P = 0,4$.
Ats.: 0,4.

7. Uždavinys. Į sandėlį atvežtos trijų staklių pagamintos detalės. Pirmosiomis staklėmis pagaminta 40% visų detalių, antrosiomis - 35% ir trečiosiomis - 25%, be to, tarp pirmosiomis staklėmis pagamintų detalių 90% yra pirmos rūšies, antrosiomis - 80%, trečiosiomis - 70%. Raskite įvykio, kad atsitiktinai paimta detalė yra pirmos rūšies, tikimybę.

Sprendimas.

Įvykis B_1 - "detalė pagaminta pirmosiomis staklėmis".
Įvykis B_2 - "detalė pagaminta antrosiomis staklėmis".
Įvykis B_3 - "detalė pagaminta trečiosiomis staklėmis".
Įvykis A - "atsitiktinai paimta detalė yra pirmos rūšies".

Tada $P(B_1) = 0{,}4$; $P(B_2) = 0{,}35$; $P(B_3) = 0{,}25$; $P(A/B_1) = 0{,}9$; $P(A/B_2) = 0{,}8$; $P(A/B_3) = 0{,}7$.

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3)$.

Iš čia $P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}815$;

$P(A) = 0{,}815$.

Ats.: 0,815.

8. Uždavinys. Sėklų daigumas lygus 60%. Kokia tikimybė, kad iš penkių sėklų sudygs ne mažiau kaip keturios ?

Sprendimas. Pagal sąlygą $n = 5$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$. Apskaičiuojame tikimybę $P_5(4) + P_5(5)$.

Pagal Bernulio teoremą

$$P_5(4) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8^4,$$

$$P_5(5) = \frac{5!}{3! \cdot 0!} 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}8^5.$$

Tada $P_5(4) + P_5(5) = 0{,}8^4 + 0{,}8^5 = 0{,}8^4(1 + 0{,}8) = 0{,}8^4 \cdot 1{,}8 =$
$= 0{,}73728$.

Ats.: 0,73728.

9. Uždavinys. Dėžėje yra 15 detalių, iš kurių 10 standartinių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paeiliui iš dėžės išimtos dvi detalės bus standartinės ?

Sprendimas. Sakykime, A ir B - įvykiai, kai iš dėžės išimtos pirmoji ir antroji detalės yra standartinės. Pagal sąlygą $P(A)=\frac{10}{15}$. Tikimybė, kad antroji detalė bus standartinė, kai pirmoji detalė buvo standartinė, lygi: $P(B/A)=\frac{9}{14}$. Tada

$$P(AB)=P(A)\cdot P(A/B)=\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}=\frac{3}{7};\ P(AB)=\frac{3}{7}.$$

Ats.: $\frac{3}{7}$.

Išspręskite tikimybių teorijos uždavinius

1. Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 20 atsitiktinai išrinktas skaičius. Kokia tikimybė, kad jis yra 20 daliklis ?

Ats.: 0,3.

2. Vienodi rutuliai dėžėje sunumeruoti nuo 1 iki 30. Atsitiktinai ištrauktas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad ištraukto rutulio numeris yra 5 kartotinis ?

Ats.: 0,2.

3. Iš dėžės, kurioje yra 9 raudoni ir 6 juodi rutuliai, atsitiktinai ištrauktas vienas. Kokia tikimybė, kad ištrauktas raudonas rutulys ?

Ats.: 0,6.

4. Iš knygų lentynoje stovinčių 10 grožinės literatūros ir 6 mokslinės literatūros knygų atsitiktinai paimamos dvi. Kokia tikimybė, kad abi knygos mokslinės literatūros ?

Ats.: $\frac{C_6^2}{C_{16}^2}$.

5. Tarp 100 sąskrydžio dalyvių 5 orientacininkai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai išrinkti trys dalyviai bus orientacininkai ?

Ats.: $\frac{C_5^3}{C_{100}^3}$.

6. Klasėje 18 mergaičių ir 12 berniukų. Atsitiktinai pagal sąrašą išrenkami trys moksleiviai dalyvauti šventėje. Kokia tikimybė, kad tai bus 2 berniukai ir 1 mergaitė ?

Ats.: $\frac{18C_{12}^2}{C_{30}^3}$.

7. Iš 30 matematikos kontrolinių darbų, 5 įvertinti nepatenkinamai. Atsitiktinai paimami keturi darbai. Kokia tikimybė, kad tarp paimtųjų darbų 2 darbai įvertinti teigiamai ?

Ats.: $\frac{C_5^2 C_{25}^2}{C_{30}^4}$.

8. Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, atsitiktinai ištrauktos 5 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus 2 tūzai ?

Ats.: $\frac{C_4^2 C_{32}^3}{C_{36}^5}$.

9. Kino teatre, kurio eilėje yra 10 vietų, atsitiktinai atsisėdo 10 klasės draugų skirtingais vardais. Kokia tikimybė, kad Romas, Jonas ir Audrius atsisės greta ?

Ats.: $\frac{1}{15}$.

10. Knygų lentynoje atsitiktinai sudėtos 6 informatikos ir 4 matematikos knygos. Kokia tikimybė, kad vieno dalyko knygos sudėtos greta ?

Ats.: $\frac{2 \cdot 6!4!}{10!}$.

11. Ant 10 vienodų kortelių surašytos raidės m, t, e, a, a, t, a, i, k, m. Atsitiktinai kortelės sudedamos į eilę. Kokia tikimybė, kad gausime žodį *matematika* ?

Ats.: $\frac{3! \cdot 2!2!}{10!}$

12. Jonas, pamiršęs du paskutinius telefono numerio skaitmenis, prisiminė, kad tie skaitmenys nelyginiai ir skirtingi. Kokia tikimybė, kad Jonas surinks teisingą telefono numerį ?

Ats.: $\frac{1}{20}$.

13. Šešiose kortelėse parašytos raidės E L K A I S. Kortelės atsitiktinai sudedamos į eilę. Kokia tikimybė, kad bus sudėtas žodis *KELIAS ?*

Ats.: $\frac{1}{720}$.

14. Dėžėje yra 10 detalių, tarp kurių 7 dažytos. Atsitiktinai traukiamos 4 detalės. Raskite įvykio, kad jos visos dažytos, tikimybę.

Ats.: $\frac{1}{6}$.

15. Keturi taškai yra ne vienoje plokštumoje. Tris jų Jonas fiksuoja mintyse. Vytas per bet kuriuos tris taškus brėžia plokštumą. Kokia tikimybė, kad Vytas nubrėš plokštumą per Jono fiksuotus taškus ?

Ats.: 0,25.

16. Lietuvių abėcėlės visos raidės surašytos 32 vienodose kortelėse. Raskite įvykio, kad atsitiktinai ištrauktos kortelės raidė bus balsė, tikimybę.

Ats.: $\frac{3}{8}$.

17. Vyksta krepšinio varžybos, kuriose dalyvauja 18 komandų, tarp kurių dvi aukščiausios klasės. Burtais komandos padalijamos į dvi grupes po devynias komandas. Raskite tikimybę, kad dvi aukščiausios klasės komandos:

1) pateks į skirtingas grupes; **2)** pateks į vieną grupę.

Ats.: **1)** $\frac{9}{17}$, ***2)*** $\frac{8}{17}$.

18. Dėžėje yra 3 balti, 4 juodi ir 2 žali vienodų dydžių rutuliai. Traukiami du rutuliai. Raskite įvykių: A - "abu ištraukti rutuliai vienodos spalvos", B - "vienas ištrauktas rutulys juodas", C - "abu ištraukti rutuliai skirtingų spalvų" tikimybes.

Ats.: $P(A)=\frac{5}{18}, P(B)=\frac{5}{9}, P(C)=\frac{13}{18}$.

19. Lošimo kauliukas metamas 3 kartus. Raskite tikimybę, kad visus tris kartus iškrito skirtingas akučių skaičius.

Ats.: $\frac{5}{9}$.

20. Keturios merginos ir trys vaikinai nutarė aplankyti teatrą. Bilietų kasoje buvo tik 4 bilietai. Burtais renkama, kuriems atiteks bilietai. Raskite tikimybę, kad bilietai atiteks 2 merginoms ir 2 vaikinams.

Ats.: $\frac{18}{35}$.

21. Vienoje klasėje yra 25 mokiniai, kitoje - 30 mokinių. Keturi pirmosios klasės mokiniai ir šeši antrosios mokosi labai gerai.

1. Iš abiejų klasių atsitiktinai parenkamas vienas mokinys. Kokia tikimybė, kad jis mokosi labai gerai ?

2. Iš abiejų klasių atsitiktinai parenkama po vieną mokinį. Raskite tikimybes įvykių:

a) abu mokosi labai gerai;

b) vienas mokosi labai gerai, kitas ne.

Ats.: **1.** $\frac{2}{11}$, **2.** ***a)*** $\frac{4}{125}$; ***b)*** $\frac{37}{125}$.

22. Klasėje yra 20 mergaičių ir 10 berniukų. Atsitiktinai parenkami trys mokiniai. Raskite tikimybes kad:

1) visi jie berniukai; **2)** visos jos mergaitės.

Ats.: **1)** $\frac{6}{203}$, **2)** $\frac{57}{203}$.

23. Ant 9 kortelių surašyti skaitmenys nuo 1 iki 9. Atsitiktinai viena po kitos traukiamos trys kortelės ir dedamos viena po kitos eilės tvarka (iš kairės į dešinę). Raskite tikimybes įvykių:

1) gauto triženklio skaičiaus visi skaitmenys lyginiai;

2) gauto triženklio skaičiaus skaitmenys eina mažėjančia tvarka.

Ats.: **1)** $\frac{1}{21}$; 2) $\frac{1}{6}$.

24. 10 žmonių atsitiktinai sodinami ant 10 vietų suolo. Kokia tikimybė, kad tam tikri du žmonės sėdės greta ?

Ats.: 0,2.

25. Yra penkios 1, 3, 4, 7, ir 9 cm ilgio atkarpos. Raskite tikimybę, kad iš šių atkarpų parinkę tris atkarpas galėsime nubraižyti trikampį.

Ats.: $\frac{1}{5}$.

26. Tikimybė laimėti turint vieną loterijos bilietą lygi $\frac{1}{7}$. Jonas įsigijo 5 bilietus. Kokia tikimybė, kad:

1) visi penki bilietai laimingi; **2)** visi bilietai nelaimingi; **3)** bent vienas bilietas laimingas ?

Ats.: $1)\ \frac{1}{7^5};\ 2)\ \frac{6^5}{7^5};\ 3)\ 1-\frac{6^5}{7^5}.$

27. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 atsitiktinai išrenkamas vienas, o iš likusiųjų - antrasis skaitmuo. Raskite tikimybę, kad bus išrinktas nelyginis skaitmuo:

1) pirmąjį kartą; **2)** antrąjį kartą; **3)** abu kartus.

Ats.: **1)** 0,6; **2)** 0,6; 3) 0,3.

28. Tikimybė išlošti loterijoje, turint vieną bilietą, lygi 0,15. Kokia tikimybė laimėti loterijoje nusipirkus 4 bilietus ?

Ats.: $\approx$ 0,478.

29. Tikimybė pataikyti į taikinį vienu šūviu lygi 0,6. Kokia tikimybė 8 šūviais pataikyti į taikinį 3 kartus ?

Ats.: 0,124.

30. Šeimoje trys vaikai. Kokia tikimybė, kad visi jie berniukai ? (Tikimybės gimti berniukui ir mergaitei vienodos.)

Ats.: $\frac{1}{8}$.

31. Dėžėje atsitiktine tvarka sudėtos 20 detalių, be to, 5 iš jų standartinės. Darbininkas atsitiktinai paima tris detales. Raskite tikimybę, kad nors viena paimtųjų detalių yra standartinė.

Ats.: $\frac{137}{228}$.

32. Raskite tikimybę, kad atsitiktinai paimtas dviženklis skaičius yra arba 3, arba 5, arba ir 3, ir 5 kartotinis.

Ats.: $\frac{7}{15}$.

33. Darbininkas prižiūri du automatus, veikiančius nepriklausomai vienas nuo kito. Tikimybė, kad vieną valandą pirmasis

automatas veiks be priežiūros, lygi 0,8, kad antrasis automatas – 0,7. Raskite tikimybę, kad vieną valandą darbininkui nereikės prižiūrėti nė vieno automato.

Ats.: 0,56.

34. Du šauliai po vieną kartą šovė į taikinį. Žinoma, kad vieno šaulio pataikymo į taikinį tikimybė lygi 0,6, o kito – 0,7. Raskite tikimybes, kad:

1) tiktai vienas šaulys pataikė į taikinį;
2) nors vienas šaulys pataikė į taikinį;
3) abu šauliai pataikė į taikinį;
4) nė vienas šaulys nepataikė į taikinį;
5) nors vienas šaulys nepataikė į taikinį.

Ats.: **1)** 0,46; **2)** 0,88; **3)** 0,42; **4)** 0,12; **5)** 0,58.

35. Tikimybė, kad studentas išlaikys įskaitą, lygi 0,8. Tik išlaikius įskaitą studentui leidžiama laikyti egzaminą. Tikimybė išlaikyti studentui egzaminą lygi 0,9. Raskite tikimybę, kad studentas išlaikys įskaitą ir egzaminą.

Ats.: 0,72.

36. Iš keturių 17, 18, 19 ir 20 metų vaikinų ir tokio pat amžiaus keturių merginų atsitiktinai renkami du žmonės. Raskite tikimybes, kad: **1)** abu išrinktieji yra vaikinai;

2) abu išrinktieji yra vaikinai, jei žinoma, kad vienas iš išrinktųjų yra vaikinas;

3) abu išrinktieji yra vaikinai, jei žinoma, kad vienam iš jų ne daugiau kaip 18 metų;

4) abu išrinktieji yra vaikinai, jei žinoma, kad vienas iš jų 17 metų.

Ats.: $1)\,\frac{3}{14};\,2)\,\frac{3}{11};\,3)\,\frac{5}{13};\,4)\,\frac{3}{7}.$

37. Stovi dvi vienodos dėžės, kurių pirmoje yra du juodi ir trys balti rutuliai, o antroje – du juodi ir vienas baltas rutulys. Iš pradžių atsitiktinai parenkama viena dėžė, o paskui iš jos atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys. Kokia tikimybė įvykio, kad bus ištrauktas baltas rutulys ?

Ats.: $\frac{7}{15}.$

Atsitiktiniai dydžiai

Atsitiktiniu dydžiu vadiname bet kokį dydį, kuris po bandymo įgyja konkrečią, iš anksto nežinomą skaitinę reikšmę.

Atsitiktinių dydžių pavyzdžiai:

a) pieno kiekis, primelžiamas iš vienos karvės per metus;

b) saulėtų dienų skaičius per mėnesį;

c) atvirtusių akučių skaičius metant lošimo kauliuką.

Atsitiktinius dydžius žymime raidėmis X, Y, Z ir pan.

Atsitiktinį dydį žymime X, jo įgyjamas reikšmes x_1, x_2, ..., x_n, o tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos, p_1, p_2, p_3, ..., p_n.

Lentelė, kurioje pateikiamos atsitiktinio dydžio galimos reikšmės ir tų reikšmių įgyjimo tikimybės, vadinama atsitiktinio dydžio skirstiniu.

Kai atsitiktinis dydis X nusakomas skirstinio lentele, viršuje užrašomos X įgyjamos reikšmės, o apačioje – tų reikšmių įgyjimo tikimybės.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Šioje lentelėje visos atsitiktinio dydžio reikšmės x_i yra skirtingos, o tikimybių suma $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

1. ***Uždavinys.*** Tarp 10 detalių 8 yra standartinės. Atsitiktinai išrenkamos dvi detalės. Sudarykite standartinių detalių tarp išrinktųjų skaičiaus skirstinį.

Sprendimas. Atsitiktinis dydis X – standartinių detalių tarp išrinktųjų skaičius. X įgyja galimas reikšmes: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

Randame galimų X reikšmių tikimybes:

$$P(X=0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}.$$

Sudarome skirstinį:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Patikrinimas: $\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1.$

2. Uždavinys. Du lošimo kauliukai vienu metu metami du kartus. Parašykite atsitiktinio dydžio X – lyginio akučių skaičiaus atsivertimo ant abiejų lošimo kauliukų skaičiaus skirstinį.

Sprendimas. Atsitiktinis dydis X įgyja tris reikšmes: $x_1 = 0$; $x_2= 1$; $x_3 = 2$. Randame galimų X reikšmių tikimybes.

Metant du lošimo kauliukus vieną kartą galimi tokie įvykiai:

(1;1) (1;3) (1;5)
(3;1) (3;3) (3;5)
(5;1) (5;3) (5;5) (a)

(1;2) (1;4) (1;6)
(3;2) (3;4) (3;6)
(5;2) (5;4) (5;6) (b)

(2;1) (2;3) (2;5)
(4;1) (4;3) (4;5)
(6;1) (6;3) (6;5) (c)

(2;2) (2;4) (2;6)
(4;2) (4;4) (4;6)
(6;2) (6;4) (6;6) (d)

Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 0, kai nė vieną kartą ant abiejų kauliukų neatvirsta lyginis akučių skaičius.

Tada $P(X=0)=\frac{9}{36}\cdot\frac{9}{36}\cdot 9=\frac{9}{16}.$

Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę x = 1, kai vieną kartą ant abiejų kauliukų atvirsta lyginis akučių skaičius.

Tada $P(X=1)=\frac{9}{36}\cdot\frac{9}{36}\cdot 6=\frac{6}{16}.$

Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę x = 2, kai abu kartus ant abiejų kauliukų atvirsta lyginis akučių skaičius.

Tada $P(X=2)=\frac{9}{16}\cdot\frac{9}{16}=\frac{1}{16}$.

Sudarome skirstinį:

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

Patikrinimas: $\frac{9}{16}+\frac{6}{16}+\frac{1}{16}=1$.

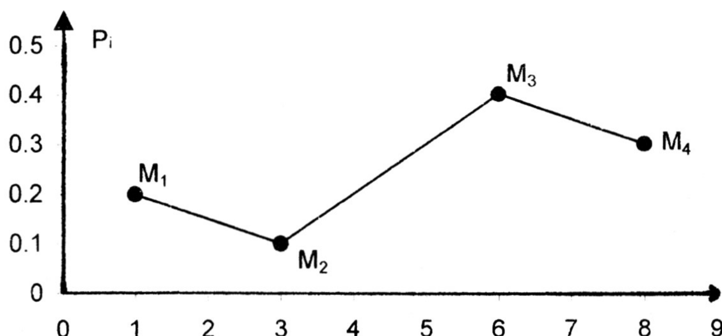
Atsitiktinio dydžio skirstinį galime pavaizduoti grafiškai atidėdami 0X ašyje atsitiktinio dydžio reikšmes x_i , o 0Y ašyje – atitinkamas tikimybes p_i.

Pavyzdys. Brėžiame atsitiktinio dydžio X skirstinio

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

grafiką.

Sujungę taškus $M_1(1; 0{,}2)$, $M_2(3; 0, 1)$, $M_3(6; 0, 4)$ ir $M_4(8; 0{,}3)$ atkarpomis, gauname pasiskirstymo daugiakampį.



Binominis tikimybės skirstinys

Apibrėžimas. Atsitiktinis dydis X, įgyjantis reikšmes 0, 1, ... , n su tikimybėmis $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ vadinamas binominiu.

1. Uždavinys. Įrengimą sudaro trys elementai, veikiantys nepriklausomai vienas nuo kito. Tikimybė vieno bandymo metu sugesti kiekvienam iš elementų lygu 0,1. Parašykite vieno bandymo metu sugedusių elementų skaičiaus skirstinį.

Sprendimas. Atsitiktinis dydis X (vieno bandymo metu sugedusių elementų skaičius) įgyja šias reikšmes: $x_1 = 0$ (nei vienas elementas nesugedo), $x_2 = 1$ (sugedo vienas elementas), $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Remiantis Bernulio formule ($n = 3$, $p = 0{,}1$, $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$) gaunama: $P_3(X = 0) = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729$;

$$P_3(X = 1) = C_3^1 \cdot p \cdot q^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$

$$P_3(X = 2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027;$$

$$P_3(X = 3) = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Patikriname:

$$0{,}729 + 0{,}243 + 0{,}027 + 0{,}001 = 1.$$

Parašome atsitiktinio dydžio X binominį skirstinį:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

2. Uždavinys. Sudarykite pataikymų į taikinį, kai paleidžiami trys nepriklausomi šūviai, skaičiaus tikimybių skirstinį. Kiekvieno šūvio pataikymo į taikinį tikimybė lygi 0,2.

Sprendimas. Atsitiktinis dydis X yra pataikymų į taikinį skaičius. Kadangi paleidžiami trys nepriklausomi šūviai, tai X įgyja reikšmes: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Tada:

$P_3(X = 0) = (0{,}8)^3 = 0{,}512;$

$P_3(X = 1) = C_3^1\ (0{,}2)^1 \cdot (0{,}8)^2 = 0{,}384;$

$P_3(X = 2) = C_3^2\ (0{,}2)^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}096;$

$P_3(X = 3) = C_3^3\ (0{,}2)^3 \cdot (0{,}8)^0 = 0{,}08.$

Sudarome lentelę:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,08

Patikrinimas: 0,512 + 0,384 + 0,096 + 0,08 = 1.

Atsitiktinio dydžio matematinė viltis (matematinis vidurkis)

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X matematine viltimi (arba matematiniu vidurkiu) vadinamas skaičius $EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots +$ $+ x_np_n$.

Apibrėžimas. Binominio skirstinio matematinė viltis lygi vieno bandymo įvykio tikimybės ir bandymų skaičiaus sandaugai:

$$E(x)=np.$$

1. Uždavinys. Turime šešiasienį simetrišką lošimo kauliuką, ant kurio sienų surašyti šeši skaičiai: 1, 1, 1, 1, 3, 3. Atliekamas toks eksperimentas: kauliukas metamas du kartus ir skaičiai, atvirtę po pirmojo ir po antrojo metimų, sudedami. Nagrinėjamas atsitiktinis dydis X, lygus atvirtusių akučių skaičių sumai.

1. Parodykite, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 2 su tikimybe $\frac{4}{9}$.

2. Baikite pildyti atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	2	4	6
P	$\frac{4}{9}$		

3. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį E(X).

Sprendimas

1. Atsitiktinis dydis X reikšmę 2 įgis tik tuo atveju, jei kiekvieną kartą metant kauliuką atvirs skaičius 1. Kauliuko metimai nepriklausomi. Apskaičiuojame dviejų nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybę: $P(X = 2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$.

2.

X	2	4	6
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Atsitiktinis dydis X įgis reikšmę 4, jei, metant kauliuką du kartus, vieną kartą atvirs skaičius 1, o kitą kartą – skaičius 3.

Vadinasi, $P(X = 4) = \frac{4 \cdot 2 + 2 \cdot 4}{6 \cdot 6} = \frac{4}{9}$.

Atsitiktinis dydis X įgis reikšmę 6 tik tuo atveju, jei metant kauliuką kiekvieną kartą atvirs skaičius 3. Apskaičiuojame dviejų nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybę:

$$P(X = 6) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}.$$

3. Matematinė viltis $E(X) = 2 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 6 \cdot \frac{1}{9} = 3\frac{1}{3}$.

2. *Uždavinys.* Turime 15 žetonų, sunumeruotų nuo 1 iki 15. Atsitiktinai traukiami trys. Nagrinėjamas atsitiktinis dydis X, ištrauktų žetonų, kurių numeriai yra penkių kartotiniai, skaičius.

1. Parodykite, kad atsitiktinis dydis X reikšmę 0 įgyja su tikimybe $\frac{220}{455}$.

2. Baikite pildyti atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	0	1	2	3
P	$\frac{220}{455}$			

3. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį E(X).

Sprendimas. Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 0 tik tuo atveju, kai tarp ištrauktųjų žetonų nėra tokių, kurių numeriai yra 5 kartotiniai.

Vadinasi, palankių įvykių skaičius $m = C_{12}^{3} = 220$.

Iš viso yra n elementariųjų įvykių, $n = C_{15}^{3} = 455$.

Tada $P(X=0)=\frac{m}{n}=\frac{220}{455}$.

2.

X	0	1	2	3
P	$\frac{220}{455}$	$\frac{198}{455}$	$\frac{36}{455}$	$\frac{1}{455}$

Atsitiktinis dydis X reikšmę 1 įgyja tik tuo atveju, kai tarp ištrauktųjų trijų žetonų yra vienas, kurio numeris 5 kartotinis.

Šiuo atveju $m=C_3^1\cdot C_{12}^2=198;\quad n=C_{15}^3=455$.

Vadinasi, $P(X=1)=\frac{m}{n}=\frac{198}{455}$.

Atsitiktinis dydis X reikšmę 2 įgyja kai tarp ištrauktųjų trijų žetonų yra du, kurių numeriai 5 kartotiniai.

$m=C_3^2\cdot C_{12}^1=36;\quad n=C_{15}^3=455.$

$$P(X=2)=\frac{m}{n}=\frac{36}{455}.$$

Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 3, kai visi trys ištrauktieji žetonai yra 5 kartotiniai.

$$m=1;\quad n=C_{15}^3=455.$$

$$P(X=3)=\frac{m}{n}=\frac{1}{455}.$$

3.

$$E(X)=0\cdot\frac{220}{455}+1\cdot\frac{198}{455}+2\cdot\frac{36}{455}+3\cdot\frac{1}{455};$$

$$E(X)=\frac{198}{455}+\frac{72}{455}+\frac{3}{455}=\frac{273}{455}.$$

3. Uždavinys. 20 kartų metama po 5 lošimo kauliukus. Raskite atsitiktinio dydžio X (metimų, kada ant dviejų kauliukų atsivers po vieną tašką, skaičiaus) matematinę viltį.

Sprendimas. Taikysime binominio skirstinio formulę E(X)=np. Tada bendras bandymų skaičius (penkių lošimo kauliukų metimas): n = 20. X – įvykių "ant dviejų kauliukų iš penkių atvirs po vieną tašką" skaičius.

Įvykio "ant dviejų kauliukų iš penkių atvirs po 1 tašką" tikimybė lygi:

$$P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5\cdot4\cdot5^3}{1\cdot2\cdot6^5}=\frac{5^4}{3\cdot6^4},$$ nes tikimybė atvirsti vienam taškui metant kauliuką lygi: $p=\frac{1}{6}$, tada tikimybė neatvirsti vienam taškui lygi: $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Ieškomoji matematinė viltis E(X) = np = $20\cdot\frac{5^4}{3\cdot6^4}\approx3.$

Ats.: E(X) $\approx$ 3.

Atsitiktinio dydžio dispersija

Atsitiktinio dydžio matematinė viltis yra skaičius, apie kurį "išsibarsčiusios" atsitiktinio dydžio reikšmės.

Atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo mąstą apibrėžia kita asitiktinio dydžio skaitinė charakteristika – dispersija.

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X dispersija vadinamas skaičius $DX = E(X - EX)^2$.

Pavyzdys. Raskite atsitiktinio dydžio X, kurio skirstinys:

X	-2	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

matematinę viltį ir dispersiją.

Matematinė viltis E(X) $= -2 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0.$

Randame atsitiktinių dydžių X – EX ir $(X - EX)^2$ skirstinius:

X – EX	-2	-1	1	2
$(X - EX)^2$	4	1	1	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$EX = 4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 2.$$

Pastaba. Atsitiktinio dydžio dispersiją patogu skaičiuoti pagal formulę: $DX = EX^2 - (EX)^2$.

Dydis $\sigma = \sqrt{DX}$ vadinamas atsitiktinio dydžio **vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu.**

Uždavinys. Raskite atsitiktinio dydžio X, kurio skirstinys:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Sprendimas. Randame atsitiktinio dydžio X matematinę viltį:

$$EX = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Parašome atsitiktinio dydžio X^2 skirstinį:

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Randame X^2 matematinę viltį:

$$E(X^2) = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3.$$

Randame ieškomąją dispersiją:

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Randame ieškomąjį vidutinį kvadratinį nuokrypį:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} \approx 3{,}9.$$

Binominio skirstinio dispersija

Apibrėžimas. Binominio skirstinio dispersija lygi įvykio pasirodymo ir nepasirodymo vieno bandymo metu tikimybių bei bandymų skaičiaus sandaugai.

$$D(X) = npq.$$

Uždavinys. Raskite atsitiktinio dydžio X dispersiją. X – įvykio A "pasirodymų" skaičius penkiuose nepriklausomuose bandymuose. Įvykio A "pasirodymo" kiekviename bandyme tikimybė lygi 0,2.

Sprendimas. D(X) apskaičiuojame pagal formulę: $D(X) = npq$.
Čia $n = 5$; $p = 0{,}2$; $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
Tada $D(X) = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}8$.

Išspręskite

1) Duotas atsitiktinio dydžio X skirstinys:

x_i	2	4	6	8	10
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Raskite EX ir DX.

Ats.: EX = 6; DX = 9.

2) Iš dėžės, kurioje yra du balti ir trys juodi rutuliai, atsitiktinai išimami 2 rutuliai. Atsitiktinis dydis X – išimtų baltų rutulių skaičius. Raskite EX ir DX.

Ats.: $EX = \frac{4}{5}$; $DX = \frac{9}{25}$.

3) Yra 4 elektros lemputės. Tikimybė, kad kiekviena jų turi defektą, lygi $\frac{1}{3}$. Tokia lemputė, įsukta į lizdą, perdega ir tada įsukama kita. Atsitiktinis dydis X - keičiamų lempučių skaičius.

1. Parodykite, kad atsitiktinis dydis X reikšmę 1 įgyja su tikimybe $\frac{2}{3}$.

2. Baikite pildyti atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	1	2	3	4
P	$\frac{2}{3}$			

3. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX ir dispersiją DX.

Ats.: **2.**

X	1	2	3	4
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

3.

$EX=\frac{40}{27}$; $DX=\frac{452}{729}$.

4) Du šauliai šauna po vieną kartą į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo į taikinį tikimybė lygi 0,5, o antrojo – 0,4. Atsitiktinis dydis X – pataikymų į taikinį skaičius. Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

Ats.:

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

5) Medžiotojas turi keturis šovinius. Pataikymo į vilką tikimybė šaunant vieną kartą lygi 0,25. Medžiotojas, pamatęs vilką, šaudys, kol pataikys ir kol turės šovinių. Atsitiktinis dydis X – pataikymų į vilką skaičius.

1. Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

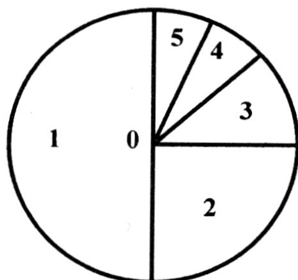
2. Apskaičiuokite EX ir DX.

Ats.: **1.**

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{108}{286}$

2. $EX \approx 2{,}734$; $DX \approx 1{,}57$.

6) Taikinys, pritvirtintas prie ašies, sukasi apie tašką O dideliu kampiniu greičiu. Šaulys, nematydamas sektorius žyminčių skaičių, šauna. Pataikęs į pirmą sektorių, šaulys išlošia 1 Lt, į antrą – pralošia 1,5 Lt, į trečią – išlošia 2 Lt, į ketvirtą – pralošia 2,5 Lt, į penktą – išlošia 3 Lt. Atsitiktinis dydis X – suma, kurią galima išlošti.



1. Parašykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
2. Apskaičiuokite EX.
3. Ar verta dalyvauti tokiame žaidime ?

Ats.: 1.

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. $EX \approx 0{,}41$ Lt.
3. Verta.

Statistikos pradmenys

Imtis. Imties skaitinės charakteristikos

Statistiniam tyrimui pasirinktų tiriamųjų objektų dalis vadinama **imtimi.** Imties elementai dar vadinami stebėjimo duomenimis, kurie žymimi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, imties elementų skaičius **imties tūris.**

Pavyzdys. Lošimo kauliukas metamas 5 kartus ($N = 5$). Jo atvirtusių akučių skaičiai tokie: $x_1 = 6$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$; $x_5 = 4$.

Šiuos duomenis surašę didėjančia tvarka, gauname **sutvarkytą imtį**, kuri vadinama **imties variacine eilute**: 1; 2; 2; 4; 6.

Didžiausios ir mažiausios imties reikšmių skirtumas vadinamas **imties pločiu.**

Šiame pavyzdyje imties plotis $r = 6 - 1 = 5$.

Didžiausios ir mažiausios imties reikšmių aritmetinis vidurkis vadinamas **imties centru** ir žymimas raide c.

Šiame pavyzdyje $c = \frac{1+6}{2} = 3{,}5$.

Skaičius, dalijantis imties tūrį į dvi lygias dalis, vadinamas **mediana.**

Pavyzdžiui, imties 1, 3, 6, 10, 13 mediana lygi 6, o imties 2, 5, 7, 10, 11, 12 mediana lygi $\frac{7+10}{2} = 8{,}5$.

Dažnių lentelė. Stebėjimo duomenis patogu surašyti į lentelę, kurios pirmoje eilutėje rašome skirtingas imties reikšmes x_i, o antroje - kiek kartų ši reikšmė pasikartoja. Skaičius, rodantis, kiek kartų elementas pasikartoja imtyje, vadinamas to elemento **dažniu** ir žymimas n_i.

Pavyzdys. Apklausus gatvėje 25 jaunuolius, apie jų amžių gauti tokie duomenys:

18, 17, 23, 18, 17,
19, 18, 20, 17, 22,
19, 21, 18, 18, 17,
22, 18, 21, 17, 21,
18, 19, 17, 23, 17.

Šią imtį užrašome dažnių lentele:

x_i	17	18	19	20	21	22	23
n_i	7	7	3	1	3	2	2

Imties tūris N = 7 + 7 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 = 25.

Elemento dažnio n_i santykis su imties tūriu N vadinamas **santykiniu dažniu** ir žymimas f_i. Taigi $f_i = \frac{n_i}{N}$.

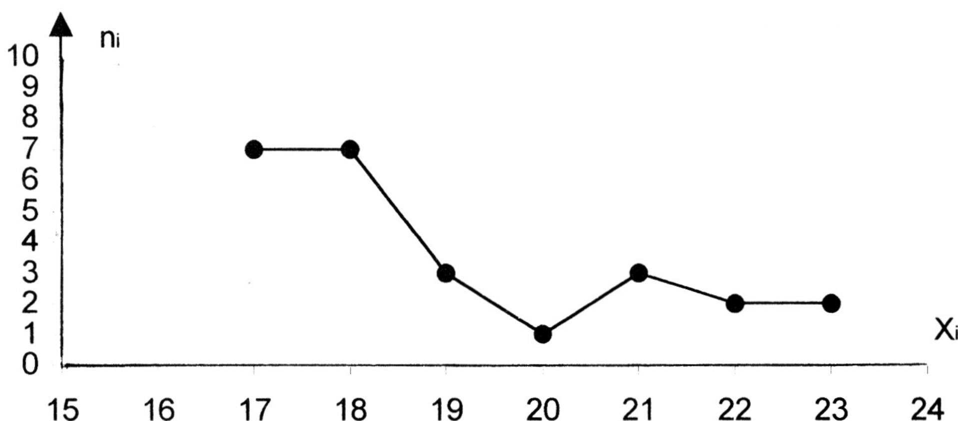
Apskaičiavę santykinius dažnius

$f_1 = \frac{7}{25} = 0{,}28,\ f_3 = \frac{3}{25} = 0{,}12$ ir t.t., surašome juos į tokią dažnių lentelę.

x_i	17	18	19	20	21	22	23
n_i	7	7	3	1	3	2	2
f_i	0,28	0,28	0,12	0,04	0,12	0,08	0,08

Patikrinimas: 0,28 + 0,28 + 0,12 + 0,04 + 0,12 + 0,08 + 0,08 = 1.

Dažnių lentelę pavaizduojame grafiškai. Šios lentelės grafinis vaizdas dar vadinamas poligonu.



Ox ašyje atidedame imties reikšmes x_i, Oy ašyje - jų dažnius n_i arba santykinį dažnį f_i.

Imties histograma

Kaip braižoma histograma ? Visas intervalas, kuriame yra imties elementai, suskirstomas į smulkesnes h ilgio dalis (intervalus). Randame vadinamąjį kiekvieno intervalo imties reikšmių skaičių, intervalo dažnį. Virš kiekvieno h ilgio intervalo braižomas stačiakampis, kurio aukštis lygus santykiniam dažniui $f_i = \frac{n_i}{N}$. Intervalo dažnio ir imties tūrio santykis vadinamas intervalo **santykiniu dažniu**. Gautas grafinis vaizdas ir yra histograma.

Prieš braižant histogramą patogu sugrupuotus duomenis surašyti į lentelę.

Uždavinys. Pamatavus įtampą (voltais) elektros tinkle, gauti matavimo rezultatai:

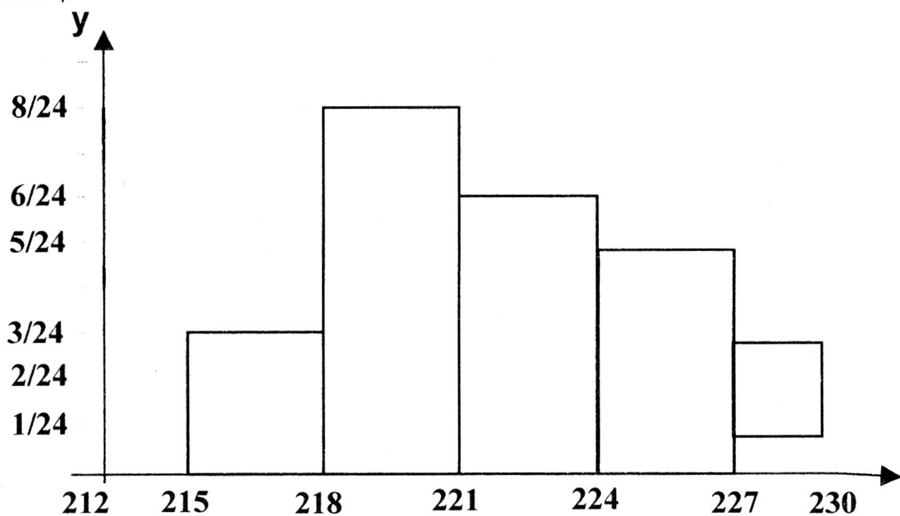
218, 221, 215, 225, 225, 217,
224, 220, 220, 219, 221, 219,
222, 227, 218, 220, 223, 230,
223, 216, 224, 227, 220, 222.

Nubrėžkite histogramą.

Sprendimas. Imame penkis dalinius intervalus, kurių ilgiai lygūs 3. Užrašome imtį dažnių lentele:

x_i	[215;218)	[218;221)	[221;224)	[224;227)	[227;230)
n_i	3	8	6	5	2
f_i	$\frac{3}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{2}{24}$

Ox ašyje atidedame intervalus, o Oy ašyje - santykinius dažnius f_i.



Imties vidurkis

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vidurkiu vadinamas aritmetinis vidurkis:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Sugrupuotas imties vidurkis apskaičiuojamas pagal formulę:

$$x = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{N}.$$

Uždavinys. Apskaičiuokite imties 2; 3; 4; 3; 6; 8; 3; 5; 10; 6 vidurkį.

Sprendimas

I būdas

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+3+6+8+3+5+10+6}{10} = 5.$$

II būdas

Imtį užrašome dažnių lentele:

x_i	2	3	4	5	6	8	10
n_i	1	3	1	1	2	1	1

Tada šios imties vidurkis lygus:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot1+3\cdot3+4\cdot1+5\cdot1+6\cdot2+8\cdot1+10\cdot1}{10} = 5.$$

Ats.: 5.

Imties dispersija

Imties x_1, x_2, ... , x_n dispersija vadinama duomenų skirtumų nuo imties vidurkio kvadratų suma, padalyta iš N. Imties dispersija žymima S^2 ir apskaičiuojama pagal formulę:

$$S^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2}{N}.$$

Sugrupuotiems duomenims taikome formulę:

$$S^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 n_1 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 n_2 + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2 n_k}{N}.$$

1. Uždavinys. Penkis kartus prietaisu matuojant strypo ilgį, gauti tokie matavimo rezultatai (milimetrais): 92; 94; 103; 105; 106. Apskaičiuokite:

a) gautų matavimų imties vidurkį;

b) prietaiso klaidų dispersiją.

Sprendimas

a) Matavimo rezultatai 92; 94; 103; 105; 106 yra imties reikšmės. Randame imties vidurkį:

$$\overline{x} = \frac{92 + 94 + 103 + 105 + 106}{5} = 100.$$

b) Randame imties dispersiją:

$$S^2 = \frac{(92-100)^2 + (91-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34.$$

Ats.: 34.

2. Uždavinys. Mokyklos abiturientai rašė matematikos kontrolinį darbą, kuris įvertintas iki 20 balų. Kontrolinio darbo rezultatai surašyti lentelėje:

Balų skaičius	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Abiturientų skaičius	1	3	7	15	21	30	12	8	3

Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją.

Sprendimas. Randame imties tūrį:

$$N = 1 + 3 + 7 + 15 + 21 + 30 + 12 + 8 + 3 = 100;$$

$$\bar{x} = \frac{12\cdot 1 + 13\cdot 3 + 14\cdot 7 + 15\cdot 15 + 16\cdot 21 + 17\cdot 30 + 18\cdot 12 + 19\cdot 8 + 20\cdot 3}{100} = 16{,}48;$$

$$S^2 = \frac{1}{100}\left((12-16{,}48)^2\cdot 1 + (13-16{,}48)^2\cdot 3 + (14-16{,}48)^2\cdot 7 +\right.$$

$$+ (15-16{,}48)^2\cdot 15 + (16-16{,}48)^2\cdot 21 + (17-16{,}48)^2\cdot 30 +$$

$$\left.+ (18-16{,}48)^2\cdot 12 + (19-16{,}48)^2\cdot 8 + (20-16{,}48)^2\cdot 3\right) = 0{,}4896$$

Ats.: $S^2 = 0{,}4896$, $\bar{x} = 16{,}48$.

Pastaba. Imties dispersiją patogu skaičiuoti pagal formulę: $S^2 = \left(\overline{x^2}\right) - \left(\bar{x}\right)^2$, t.y. imties dispersija lygi imties reikšmių kvadratų vidurkio ir imties vidurkio kvadrato skirtumui.

3. Uždavinys. Duota imtis 4; 5; 3; 2; 1; 2; 0; 7; 7; 3. Raskite imties vidurkį ir dispersiją.

Sprendimas. Imties tūris N = 10. Imties vidurkis:

$$\bar{x} = \frac{4+5+3+2+1+2+7+7+3}{10} = 3{,}4.$$

Surandame imties reikšmių kvadratų vidurkį:

$$\overline{x^2} = \frac{4^2+5^2+3^2+2^2+1^2+2^2+7^2+7^2+3^2}{10} = 16{,}6.$$

Tada $S^2 = 16{,}6 - 3{,}4^2 = 5{,}04$.

Ats.: $\bar{x} = 3{,}4$; $S^2 = 5{,}04$.

Kvadratinė šaknis iš imties dispersijos vadinama imties x_1, x_2, ... , x_n **vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu.** Jis žymimas raide S.

$$S = \sqrt{S^2}.$$

3 uždavinio imties vidutinis kvadratinis nuokrypis

$$S = \sqrt{5,04} \approx 2,24.$$

4. Uždavinys. Prietaisu A išmatavus fizikinį dydį, gauti tokie matavimo rezultatai: 8; 9; 11; 12, o prietaisu B - 5; 8; 13; 14. Apskaičiuokite imčių vidurkius, dispersijas, vidutinius kvadratinius nuokrypius. Kuris prietaisas tiksliau matuoja ?

Sprendimas

Prietaisas A: imties tūris N = 4.

$$\bar{x} = \frac{8+9+11+12}{4} = 10.$$

$$\overline{(x^2)} = \frac{8^2+9^2+11^2+12^2}{4} = 102,5.$$

$$S^2 = 102,5 - 100 = 2,5.$$

$$S = \sqrt{2,5} \approx 1,58.$$

Prietaisas B: imties tūris N = 4.

$$\bar{x} = \frac{5+8+13+14}{4} = 10.$$

$$\overline{(x^2)} = \frac{5^2+8^2+13^2+14^2}{4} = 113,5.$$

$$S^2 = 113,5 - 100 = 13,5.$$

$$S = \sqrt{13,5} \approx 3,7.$$

Vadinasi, tikslesnis prietaisas A.

Ats.: Tikslesnis prietaisas A.

Išspręskite

1. Duota imtis 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Užrašykite ją:

1) variacine eilute;
2) dažnių lentele.
3) Raskite imties tūrį.

Ats.: **1)** 2; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 10; 10.

2)

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

3) N = 15.

2. Duota imtis 7, 7, 2, 7, 7, 5, 5, 7, 5, 7.

1) raskite imties tūrį ir plotį;
2) užrašykite imtį santykinių dažnių lentele.

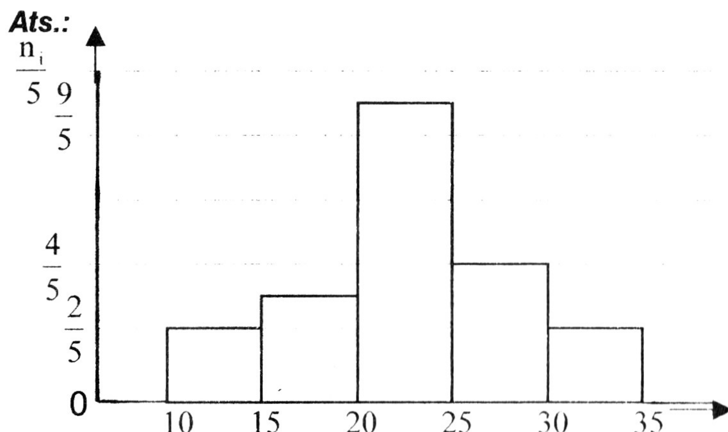
Ats.: **1)** N = 10; r = 5.

2)

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6
f_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

3. Duota imtis 17, 19, 20, 10, 14, 16, 21, 21, 22, 35, 27, 32, 24, 24, 24, 24, 27, 27, 27. Nubrėžkite histogramą, padaliję intervalą nuo mažiausios imties reikšmės iki didžiausios į 5 dalis.

Ats.:



4. Matuojant tam tikrą dydį 50 kartų, gauti tokie duomenys:

2,2; 5,3; 3,4; 4,5; 5,1; 3,4; 4,3; 2,7; 3,5; 5,8;
2,3; 4,4; 4,7; 2,1; 4,8; 3,6; 3,5; 4,2; 5,7; 3,7;
4,2; 3,4; 4,3; 3,4; 4,3; 4,1; 5,3; 4,8; 5,1; 2,4;
3,7; 4,3; 5,6; 4,5; 3,4; 3,2; 4,6; 3,6; 4,2; 4,1;
5,5; 4,6; 4,8; 4,5; 4,3; 4,8; 3,9; 3,8; 5,9; 5,1.

Apskaičiuokite imties: **1)** vidurkį; **2)** dispersiją.

***Ats.:** $\bar{x} = 4{,}158;$
$S^2 = 0{,}87.$

5. Centimetro tikslumu pamatuotas 100 moksleivių ūgis ir matavimo rezultatai surašyti lentelėje.

Ūgis	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-181
Moksleivių skaičius	10	14	26	28	12	8	2

Raskite šios imties vidurkį ir dispersiją.

Ats.: $\bar{x} = 166;$
$S^2 = 33{,}44.$

Turinys

Grebeničenkaitė P., Tamašauskas V., Tumėnaitė E. Trumpas kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos kursas moksleiviams.

Leidinys skirtas moksleiviams ir mokytojams. Jis padės susisteminti kombinatorikos, tikimybių teorijos, matematinės statistikos žinias.

Viršelio dailininkė **Jurgina Jankauskienė**
Atsakomasis redaktorius **Stasys Tumėnas**

SL **2031**. 2000 11 28. **5,6** sp.l.
Užs. Nr. 3936 . Tiražas **3000** egz.
Išleido "**Šiaurės Lietuva**"
Spausdino **AB SPAUSTUVĖ "TITNAGAS"**
Vasario 16-osios g. 52, 5400 Šiauliai

Kaina sutartinė